1 Macierze

Podstawowe definicje

Definicja 1.1. *(Macierz)*
Macierzą nazywamy prostokątną tablicę liczb rzeczywistych lub zespolonych postaci

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Z reguły macierze oznaczamy dużymi pojedynczymi literami $A, B, \dots$.
Symbole $a_{11}, a_{12}, \dots$ nazywamy elementami macierzy. W ogolności, stosujemy zapis a_{ik}, który oznacza element w i-tym wierszu oraz k-tej kolumnie.

W ramach wykładu będziemy rozważać wyłącznie macierze o wyrazach rzeczywistych.

Definicja 1.2. *(Wymiar macierzy)*
O macierzy mówimy, że jest wymiaru $n \times m$, gdzie n to ilość wierszy, zaś m to liczba kolumn. Często stosujemy zapis skrócony $A = [a_{ik}]_{n\times m} = [a_{ik}]_{i=1,\dots,n;j=1,\dots,m}$. Gdy liczba wierszy jest równa liczbie kolumn (tzn. $n = m$), to mówimy o macierzy kwadratowej stopnia n. Liczbę n nazywamy stopniem macierzy.

Definicja 1.3. *(Rodzaje macierzy)*
Wśród macierzy mamy w szczególności:

- *macierz wierszową*
$$A = [a_1, \dots, a_n].$$
- *macierz kolumnową*
$$B = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{bmatrix}.$$
Oba powyższe rodzaje macierzy nazywamy również wektorem.
- *macierz jednostkowa*
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$
- *macierz diagonalna*
$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

- *macierz zerowa.*
- *macierz symetryczna.*
- *macierz trójkątna*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Definicja 1.4. *(Równość macierzy)*
Dwie macierze $A = [a_{ik}]$ oraz $B = [b_{ik}]$ będące tego samego wymiaru $n \times m$ nazywamy równymi, jeżeli odpowiednie elementy obu macierzy są sobie równe, tzn.

$$a_{ik} = b_{ik} \quad dla \quad i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m.$$

Relacja równości macierzy jest:

- *zwarta, tzn. $A = A$;*
- *symetryczna, tzn. $A = B \Rightarrow B = A$;*
- *przechodnia, tzn. $A = B$ i $B = C \Rightarrow A = C$.*

Definicja 1.5. *(macierz transponowana)*
Macierz transponowana do danej macierzy A, to macierz która powstała przez zamianę wierszy na kolumny z zachowaniem ich kolejności, tzn. pierwszy wiersz staje się pierwszą kolumną itd. Oznaczamy ją symbolem A^T.

Przykład 1.1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 9 & 0 \\ -3 & 7 & 7 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 7 \\ 4 & 9 & 7 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Uwaga 1.1. Macierz symetryczna jest macierzą równą swojej transpozycji, tzn. $A = A^T$.

1.1 Działania na macierzach

Definicja 1.6. *(Dodawanie i odejmowanie macierzy)*
Operacje dodawania i odejmowania macierzy są możliwe tylko w przypadku macierzy tego samego wymiaru. Mając dane macierze $A = [a_{ik}]$ oraz $B = [b_{ik}]$ tego samego wymiaru $n \times m$, ich sumę tworzymy poprzez dodanie do siebie elementów o tych samych wskaźnikach, tzn.

$$[a_{ik}]_{n\times m} + [b_{ik}]_{n\times m} = [a_{ik} + b_{ik}]_{n\times m},$$

oraz

$$[a_{ik}]_{n\times m} - [b_{ik}]_{n\times m} = [a_{ik} - b_{ik}]_{n\times m}.$$

Dodawanie macierzy jest łączne oraz przemienne.

Przykład 1.2. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{zaś} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wówczas

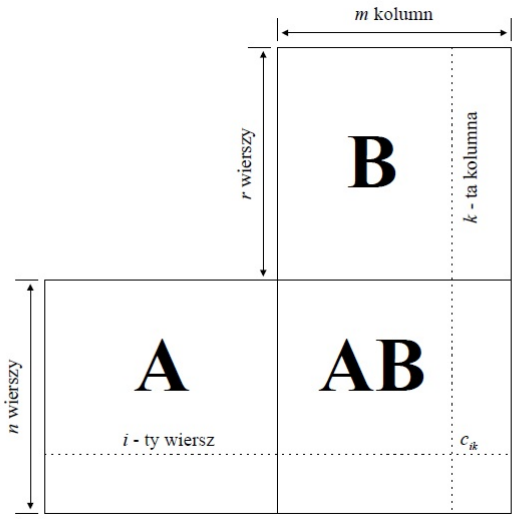
$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & 10 \\ 6 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{zaś} \quad A - B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -9 \\ 1 & 5 & -2 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Definicja 1.7. *Iloczyn liczby $k = const$ przez macierz $A = [a_{ik}]_{n\times m}$ określamy jako*

$$k[a_{ik}]_{n\times m} = [k \cdot a_{ik}]_{n\times m}.$$

Definicja 1.8. *(Mnożenie macierzy)*
Mnożenie macierzy przez macierz jest możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy liczba kolumn pierwszej macierzy jest równa liczbie wierszy drugiej macierzy. Niech $A = [a_{ij}]_{n\times r}$ oraz $B = [b_{jk}]_{r\times m}$. Iloczynem $A \cdot B$ nazwiemy taką macierz $C = [c_{ik}]_{n\times m}$, w której element c_{ik}, czyli element położony w i-tym wierszu oraz k-tej kolumnie, jest równy sumie iloczynów odpowiednich elementów i-tego wiersza macierzy A i elementów k-tej kolumny macierzy B.

Przy mnożeniu macierzy często stosuje się tzw. schemat Falka.



Przykład 1.3. Rozważmy macierze A i B jak w przykładzie powyżej. Mamy

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 1 - 1\cdot 2 - 3\cdot 1 & 0\cdot 1 - 1\cdot(-3) - 3\cdot 1 & 6\cdot 1 - 1\cdot 6 - 3\cdot 1 \\ 1\cdot 3 + 2\cdot 2 + 4\cdot 1 & 0\cdot 3 - 3\cdot 2 + 1\cdot 4 & 3\cdot 6 + 6\cdot 2 + 1\cdot 4 \\ 1\cdot 5 + 2\cdot 0 + 1\cdot 0 & 0\cdot 5 - 3\cdot 0 + 1\cdot 0 & 6\cdot 5 + 0\cdot 6 + 0\cdot 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 0 & -3 \\ 11 & -2 & 34 \\ 5 & 0 & 30 \end{bmatrix}.$$

Uwaga 1.2. *Mnożenie macierzy NIE JEST przemienne, tzn. w ogólności $A \cdot B \neq B \cdot A$. Może zaistnieć sytuacja, że iloczyn $A \cdot B$ istnieje, zaś iloczyn $B \cdot A$ już nie.*

Uwaga 1.3. Można sprawdzić, że $IA = AI = A$, gdzie I oznacza macierz jednostkową.

Definicja 1.9. *(Wynzacznik)*
Każdej macierzy kwadratowej A stopnia n można przyporządkować liczbę, zwaną wyznacznikiem. Oznaczamy go przez $det(A)$ lub $|A|$.
Dla $n = 1$, mamy $A = [a_{11}]$, stąd $|A| = a_{11}$.

Dla $n = 2$, mamy $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, stąd $|A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.

Dla $n = 3$ stosujemy metodę Sarrusa. Mamy $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, zatem

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}.$$

Uwaga 1.4. Przy pomocy metody Sarrusa obliczamy wartość wyznacznika wyłącznie trzeciego stopnia. Stosowanie tej metody dla macierzy stopnia $n > 3$ jest błędne.

Definicja 1.10. *(Minor)*
Minorem danej macierzy nazywamy każdy wyznacznik określony podmacierzą kwadratową z danej macierzy przez skreślenie pewnej liczby wierszy lub kolumn.
Minorem odpowiadającym danemu elementowi a_{ik} macierzy kwadratowej A nazywamy wyznacznik, który powstaje z elementów pozostałych po skreśleniu i-tego wiersza i k-tej kolumny.

Definicja 1.11. *(Dopełnienie algebraiczne)*
Dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ik} nazywamy liczbę równą iloczynowi minora odpowiadającemu temu elementowi a_{ik} oraz wyrażenia $(-1)^{i+k}$. Macierz zbudowaną z dopełnień algebraicznych elementów a_{ik} macierzy A nazywamy macierzą dopełnień algebraicznych i oznaczamy przez A^D.

Twierdzenie 1.1. *(Wyznacznik macierzy dowolnego stopnia)*
Przez wyznacznik stopnia n, gdzie $n > 1$ rozumiemy sumę iloczynów elementów dowolnego wiersza lub kolumny i ich dopełnień algebraicznych.

Definicja 1.12. *(Macierz osobliwa)*
Macierzą osobliwą nazywamy macierz kwadratową, której wyznacznik równa się zeru. W przeciwnym przypadku macierz nazywamy nieosobliwą.

Twierdzenie 1.2. *(Własności wyznaczników)*

- *Przestawienie dwóch kolumn lub wierszy zmienia wartość wyznacznika na przeciwną;*
- *Pomnożenie kolumny lub wiersza przez pewną liczbę powoduje pomnożenie wartości wyznacznika przez tą liczbę;*
- *Jeżeli do pewnej kolumny lub wiersza wyznacznika dodamy inną kolumnę lub odpowiednio wiersz tego wyznacznika to wartość wyznacznika nie ulegnie zmianie;*
- *Jeżeli do pewnej kolumny lub wiersza wyznacznika dodamy inną kolumnę lub odpowiednio inny wiersz tego wyznacznika pomnożoną przez dowolną liczbę to wartość wyznacznika nie ulegnie zmianie;*
- *Jeżeli do pewnej kolumny lub wiersza wyznacznika dodamy dowolną kombinację liniową innych kolumn lub odpowiednio wierszy tego wyznacznika, to wartość wyznacznika nie ulegnie zmianie;*
- *Jeżeli wyznacznik zawiera kolumnę lub wiersz zerowy, lub dwie identyczne kolumny lub wiersze, to jego wartość równa się zero;*
- *Zachodzi* $|A| = |A^T|$*;*
- *Zachodzi* $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$*.*

Definicja 1.13. *(Rząd macierzy)*
Rzędem macierzy A nazywamy najwyższy stopień różnych od zera minorów tej macierzy. Oznaczamy go przez $rz(A)$*. Możemy też powiedzieć, że rzędem macierzy nazywamy maksymalną liczbę kolum lub wierszy liniowo niezależnych.*
Rząd macierzy nie ulegnie zmianie, jeżeli do elementów dowolnego wiersza macierzy dodamy elementy innego wiersza tej macierzy pomnożone przez dowolną liczbę.
Nie ulegnie on również zmianie jeżeli skreślimy jedną z dwóch identycznych kolumn lub wierszy macierzy.

Definicja 1.14. *(Macierz odwrotna)*
Macierzą odwrotną macierzy nieosobliwej A nazywamy taką macierz A^{-1} *dla której*

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I.$$

Macierz odwrotną do A możemy wyznaczyć ze wzoru

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}[A^D]^T.$$

1.2 Układy równań liniowych

Definicja 1.15. *(Równanie liniowe)*
Równaniem liniowym o n niewiadomych nazywamy równanie postaci

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,$$

gdzie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *to współczynniki równania, zaś b to wyraz wolny.*
Dla $b = 0$ *równanie nazywamy jednorodnym, zaś dla* $b \neq 0$ *równanie nazywamy niejednorodnym.*

Rozwiązaniem równania liniowego nazywamy każdy ciąg n liczb reczywistych spełniający to równanie. Rozwiązać równanie to podać WSZYSTKIE jego rozwiązania, lub stwierdzić, że rozwiązań nie ma. Zbiór wszystkich rozwiązań nazywamy rozwiązaniem ogólnym, a każde pojedyncze rozwiązanie nazywamy rozwiązaniem szczególnym.

Definicja 1.16. *(Układ równań)*
Układ m równań o n niewiadomych ma postać

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Możemy go zapisać w postaci

$$AX = B,$$

gdzie $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$ *jest macierzą współczynników, zaś* $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}$ *macierzą wyrazów wolnych.*

Będziemy również używać oznaczenia na tzw. macierz uzupełnioną $U = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$.

Uwaga 1.5. Rozważmy układ równań w postaci macierzowej. Następujące operacje nie wpływają na zmianę układu (tzn. powstaje układ równoważny):

- przestawienie dwóch wierszy;
- pomnożenie wiersza przez liczbę różną od zera;
- pomnożenie wiersza przez dowolną liczbę i dodanie go do innego wiersza.

Wspomniane operacje dokonujemy na macierzy uzupełnionej, a więc również na kolumnie wyrazów wolnych.

Metoda Cramera

Definicja 1.17. *(Układ Cramera)*
Układ równań liniowych nazywamy układem Cramera, gdy $n = m$ oraz $|A| \neq 0$.

Twierdzenie 1.3. *Układ Cramera jest układem oznaczonym i ma rozwiązanie dane wzorem*

$$x_1 = \frac{W_1}{W}, \quad x_2 = \frac{W_2}{W}, \ldots, x_n = \frac{W_n}{W},$$

gdzie $W = |A|$, zaś W_i to wyznacznik macierzy, który powstaje z macierzy A poprzez zastąpienie i-tej kolumny kolumną wyrazów wolnych.
Jeżeli $W = 0$ i co najmniej jedna z liczb $W_1, W_2, \ldots, W_n \neq 0$ to układ Cramera jest sprzeczny.
Jeżeli $W = 0$ oraz $W_1 = W_2 = \ldots = W_n = 0$ to układ Cramera jest nieoznaczony.

Uwaga 1.6. Przypominamy, że układ oznaczony to taki, który posiada jedno rozwiązanie. Układ nieoznaczony to taki który posiada nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od parametru lub parametrów. Układ sprzeczny to układ równań, który nie ma rozwiązań.

Przykład 1.4. Rozwiąż

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y - z = 1 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

Metoda Kroneckera-Capelliego

Twierdzenie 1.4. *Układ równań jak wyżej w postaci macierzowej $AX = B$ jest układem:*
1. oznaczonym, jeżeli $rz(A) = rz(U) = n$, gdzie n oznacza ilość niewiadomych w układzie;
2. nieoznaczonym, jeżeli $rz(A) = rz(U) < n$;
3. sprzecznym, jeżeli $rz(A) \neq rz(U)$.

Uwaga 1.7. Do wyznaczenia jak dokładnie wygląda rozwiązanie możemy posłużyć się np. metodą Cramera lub metodą eliminacji Gaussa, którą wkrótce poznamy.

Przykład 1.5. Rozwiąż

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ 4x - y + 3z = 1 \end{cases}$$

Metoda eliminacji Gaussa

Układ $AX = B$ można za pomocą przekształceń elementarnych sprowadzić do układu postaci

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & \dots \\ 0 & c_{22} & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_n \end{bmatrix}.$$

Dążymy zatem po lewej stronie do macierzy z zerami poniżej przekątnej.

Przykład 1.6. Rozwiąż

$$\begin{cases} x - y + z - t + s = 1 \\ x - y + z + t - s = 1 \\ x - y + z + 3t - 3s = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + 2z = 2 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$$