1. Funkcje wielu zmiennych

Zadanie 1.1. Obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia $(1,04)^{(2,02)}$.

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

Zadanie 1.2. Obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia $\sqrt{2,03\cdot 7,96}$.

Zadanie 1.3. Wykazać, że każda funkcja $z(x,y) = x^2 f\left(\frac{y}{x^2}\right)$, gdzie f jest funkcją różniczkowalną jednej zmiennej, spełnia równanie

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} = 2z.$$

Zadanie

Pokazać, że funkcja $z = arctg\dfrac{u}{v}$

gdzie $u = x + y,\quad v = x - y$ spełnia równanie

$$\frac{dz}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x-y}{x^2+y^2}$$

Zadanie

$u = e^x(xcosy - ysiny)$. Pokazać, że $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

Twierdzenie (o pochodnych cząstkowych funkcji złożonej)

Jeżeli funkcja $z = f(u,v)$ ma pochodne cząstkowe $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ i $\dfrac{\partial f}{\partial v}$

ciągłe w obszarze D, a ponadto funkcje $u = u(x,y)$ i $v = v(x,y)$

mają pochodne cząstkowe $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$ w obszarze Δ

oraz $(u,v) \in D$ gdy (x,y) ∈ Δ

to funkcja złożona dwóch zmiennych x i y

$$z = f[u(x,y), v(x,y)] = F(x,y)$$

ma pochodne cząstkowe $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ i $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

w każdym punkcie obszaru Δ, przy czym

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\,\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\,\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\,\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\,\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$