1. Obliczyć granicę funkcji (być może niewłaściwą) lub wykazać, że żądana granica nie istnieje:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{y^3-x^3}{x-y}$;

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$;

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\sin xy}{x}$;

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sin xy}{x}$;

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{x}$;

f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\frac{1}{\sin xy}$;

g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$;

h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$;

i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$;

j) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^3}$;

k) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y\ln(x^2+y^2)$.

2. Znaleźć granice

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} \quad \text{oraz} \quad \lim_{k\to 0}\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}$$

dla następujących funkcji:

a) $f(x,y)=x+y$, b) $f(x,y)=xy$; c) $f(x,y)=x^2+y^2$; d) $f(x,y)=x^2y^3-2x$.

3. Niech

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{dla } x^2+y^2\neq 0;\\ 0 & \text{dla } x=y=0. \end{cases}$$

Wykazać, że funkcja f nie jest ciągła w punkcie $(0,0)$.

4. Obliczyć pochodne cząstkowe funkcji:

a) $z=5x^7y-3xy+x^3-y^3+10$, b) $z=\sqrt{10x+7y}$, c) $z=(x-y)e^{-y}$, d) $z=\frac{xy}{x-y}$,

e) $z=\frac{x^3}{y}+\frac{y}{x^3}$, f) $z=x\sqrt{y^5}+\frac{y}{\sqrt{x}}$, g) $z=\ln(x^3y+3y^2)$, h) $u=(1+xy)^z$,

i) $z=\operatorname{arctg}\frac{x+1}{x+y}$, j) $z=x\cos(5x-y)$, k) $z=ye^{5xy}$, l) $z=\frac{7x^2-2y^2}{2x^3+7y^3}$,

m) $u=\ln(x^6y^7z^8)$, n) $u=\cos(xy-yz)$, o) $u=10xy+7xz+6yz-5xyz$.

5. Wyznaczyć gradienty podanych funkcji:

$u=\frac{x^3y}{5z}$, $u=ze^{xyz}$.

6. Wyznaczyć gradient funkcji $u=\frac{1}{\sqrt{x+y+z^2}}$ w punkcie $M=(1, 2, 3)$.

ROZWIĄZANIA:

Definicja:

Niech $f : D \to \mathbb{R}$ i niech (x_0, y_0) będzie punktem skupienia zbioru D.
Liczbę g nazywamy granicą właściwą funkcji f w (x_0, y_0) i zapisujemy:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = g,$$

jeżeli dla każdego ciągu punktów $\{(x_k, y_k)\}$, zbieżnego do (x_0, y_0) takiego, że $(x_k, y_k) \in D$ i $(x_k, y_k) \neq (x_0, y_0)$ dla $k \in \mathbb{N}$, ciąg wartości $\{f(x_k, y_k)\}$ jest zbieżny do g.

Rozwiązanie do zadania 1.

Wybrane przykłady:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{y^3-x^3}{x-y}$,
w tym wypadku $f(x,y) = \frac{y^3-x^3}{x-y}$, określamy dziedzinę $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$.
Niech (x_n, y_n), $n \in \mathbb{N}$ będzie dowolnym ciągiem punktów,
takim, że $(x_n, y_n) \in D$**, tzn.** $x_n \neq y_n$ i niech $(x_n, y_n) \neq (1,1)$ oraz $(x_n, y_n) \to (1,1)$, gdy $n \to \infty$. Wtedy

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{y^3-x^3}{x-y} = \lim_{(x_n,y_n)\to(1,1)} \frac{y_n^3-x_n^3}{x_n-y_n} = \lim_{(x_n,y_n)\to(1,1)} (-y_n^2 - x_n y_n - x_n^2) = -3.$$

(Skorzystaliśmy tutaj z tego, że $x_n \neq y_n$ bo założyliśmy, że (x_n, y_n) należy do dziedziny funkcji $f(x,y) = \frac{y^3-x^3}{x-y}$.)

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$,
w tym wypadku $f(x,y) = \frac{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$,
określamy dziedzinę $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (0,0)\}$.
Niech (x_n, y_n), $n \in \mathbb{N}$ będzie dowolnym ciągiem punktów,
takim, że $(x_n, y_n) \in D$**, tzn.** $(x_n, y_n) \neq (0,0)$ oraz $(x_n, y_n) \to (0,0)$, gdy $n \to \infty$.
Wtedy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} = \lim_{(x_n,y_n)\to(0,0)} \frac{\sqrt{1+{x_n}^2+{y_n}^2}-1}{{x_n}^2+{y_n}^2} =$$

$$= \lim_{(x_n,y_n)\to(0,0)} \frac{\sqrt{1+{x_n}^2+{y_n}^2}-1}{{x_n}^2+{y_n}^2} \frac{\sqrt{1+{x_n}^2+{y_n}^2}+1}{\sqrt{1+{x_n}^2+{y_n}^2}+1} =$$

$$= \lim_{(x_n,y_n)\to(0,0)} \frac{1+{x_n}^2+{y_n}^2-1}{({x_n}^2+{y_n}^2)(\sqrt{1+{x_n}^2+{y_n}^2}+1)} =$$

$$= \lim_{(x_n,y_n)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{1+{x_n}^2+{y_n}^2}+1} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}.$$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\sin xy}{x}$,
w tym wypadku $f(x,y) = \frac{\sin xy}{x}$,
określamy dziedzinę $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$.
Niech (x_n, y_n), $n \in \mathbb{N}$ będzie dowolnym ciągiem punktów,
takim, że $(x_n, y_n) \in D$**, tzn.** $x_n \neq 0$ oraz $(x_n, y_n) \to (1,0)$, gdy $n \to \infty$. Wtedy

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\sin xy}{x} = \lim_{(x_n,y_n)\to(1,0)} \frac{\sin x_n y_n}{x_n}.$$

Zauważmy, że:
1. gdy $y_n = 0$ to $\frac{\sin x_n y_n}{x_n} = 0$.
2. jeżeli $y_n \neq 0$ dla $n \in \mathbb{N}$, to

$$\lim_{(x_n,y_n)\to(1,0)} \frac{\sin x_n y_n}{x_n} = \lim_{(x_n,y_n)\to(1,0)} \frac{\sin x_n y_n}{x_n y_n} \cdot y_n = 1 \cdot 0 = 0.$$

Zatem z 1. oraz 2. mamy, że jeśli $x_n \neq 0$ oraz $(x_n, y_n) \to (1,0)$, to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin x_n y_n}{x_n} = 0.$$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sin xy}{x}$,
w tym wypadku $f(x,y) = \frac{\sin xy}{x}$,
określamy dziedzinę $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$.
Niech (x_n, y_n), $n \in \mathbb{N}$ będzie dowolnym ciągiem punktów,
takim, że $(x_n, y_n) \in D$**, tzn.** $x_n \neq 0$ i niech $(x_n, y_n) \neq (0,1)$ oraz $(x_n, y_n) \to (0,1)$, gdy $n \to \infty$. Wtedy

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sin xy}{x} = \lim_{(x_n,y_n)\to(0,1)} \frac{\sin x_n y_n}{x_n}.$$

Ponieważ $(x_n, y_n) \to (0,1)$, zatem $y_n \to 1$, czyli dla dostatecznie dużych n możemy przyjąć, że $y_n \neq 0$. Mamy więc dla x_n, $y_n \neq 0$, $(x_n, y_n) \to (0,1)$, że

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sin xy}{x} = \lim_{(x_n,y_n)\to(0,1)} \frac{\sin x_n y_n}{x_n} = \lim_{(x_n,y_n)\to(0,1)} \frac{\sin x_n y_n}{x_n y_n} \cdot y_n = 1 \cdot 1 = 1.$$

f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sin xy}$,
w tym wypadku $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{\sin xy}$.
Weźmy $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, $(x'_n, y'_n) = (\frac{1}{n}, \frac{2}{n})$,
wtedy $(x_n, y_n) \to (0,0)$, $(x'_n, y'_n) \to (0,0)$ oraz

$$\lim_{(x_n,y_n)\to(0,0)} \frac{x_n^2+y_n^2}{\sin x_n y_n} = \lim_{(x_n,y_n)\to(0,0)} \frac{x_n^2+y_n^2}{x_n y_n} \cdot \frac{x_n y_n}{\sin x_n y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\sin \frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} 2 \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\sin \frac{1}{n^2}} = 2,$$

$$\lim_{(x'_n,y'_n)\to(0,0)} \frac{{x'_n}^2+{y'_n}^2}{\sin x'_n y'_n} = \lim_{(x'_n,{y_n}')\to(0,0)} \frac{{x'_n}^2+{y'_n}^2}{x'_n y'_n} \cdot \frac{x'_n y'_n}{\sin x'_n y'_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} \cdot \frac{\frac{2}{n^2}}{\sin \frac{2}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{2} \cdot \frac{\frac{2}{n^2}}{\sin \frac{2}{n^2}} = \frac{5}{2}.$$

Znaleźliśmy dwa różne ciągi $(x_n, y_n) \to (0,0)$, $(x'_n, y'_n) \to (0,0)$, dla których granica funkcji $\frac{x^2+y^2}{\sin xy}$ ma różną wartość, zatem badana granica funkcji $f(x,y)$ nie istnieje.

g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$,
w tym wypadku $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$.
Weźmy $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, $(x'_n, y'_n) = (\frac{1}{n}, \frac{2}{n})$,
wtedy $(x_n, y_n) \to (0,0)$, $(x'_n, y'_n) \to (0,0)$ oraz

$$\lim_{(x_n,y_n)\to(0,0)} \frac{x_n\, y_n}{x_n^2+y_n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{(x'_n,y'_n)\to(0,0)} \frac{x'_n y'_n}{{x'_n}^2+{y'_n}^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{5}{n^2}} = \frac{2}{5}.$$

Znaleźliśmy dwa różne ciągi $(x_n, y_n) \to (0,0)$, $(x'_n, y'_n) \to (0,0)$, dla których granica funkcji $\frac{xy}{x^2+y^2}$ ma różną wartość, zatem badana granica funkcji $f(x,y)$ nie istnieje.

i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$,
w tym wypadku $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$,

określamy dziedzinę $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (0,0)\}$.
Ponieważ $0 \leqslant (x^2-y^2)^2$, zatem $2x^2y^2 \leqslant x^4+y^4$ skąd

$$4x^2y^2 \leqslant (x^2+y^2)^2.$$

Korzystając z tej nierówności mamy dla $(x,y) \neq (0,0)$, że

$$0 \leqslant \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \leqslant \frac{1}{4} \cdot \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2} = \frac{1}{4}(x^2+y^2).$$

Jeśli $(x,y) \to 0$ to $x^2+y^2 \to 0$, zatem z twierdzenia o trzech ciągach:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0.$$