Graf

25 marca 2018

Graf

Definicja 1

Graf ogólny to para $G = (V, E)$, gdzie

V jest zbiorem *wierzchołków (węzłów, punktów grafu)*,

E jest rodziną *krawędzi*, które mogą być wielokrotne, dokładniej jednoelementowych lub dwuelementowych podzbiorów V.

Gdańsk
Szczecin
Bydgoszcz
Warszawa
Poznań
Katowice
Kraków
Zakopane

Graf

Definicja 2

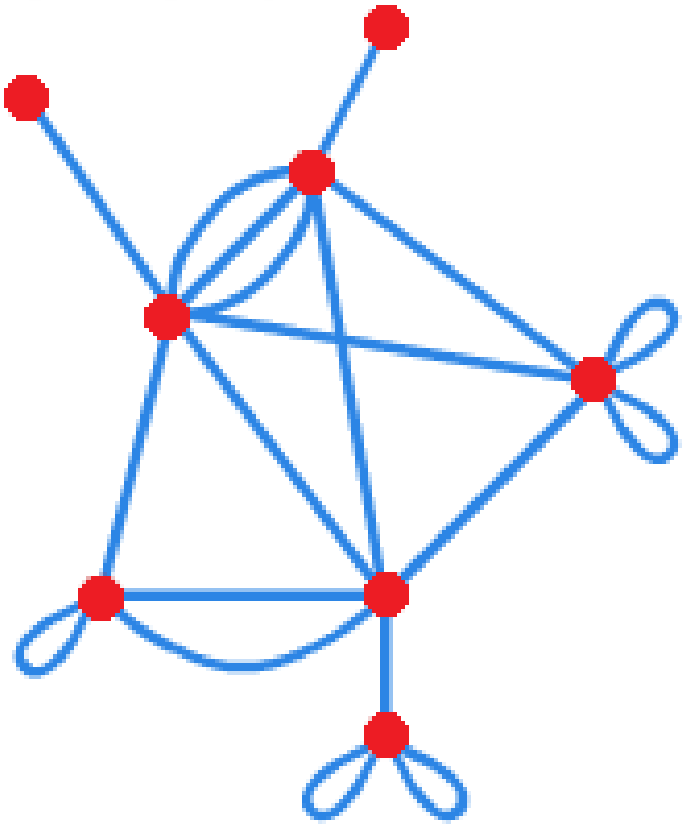
Graf prosty to para $G = (V, E)$, gdzie

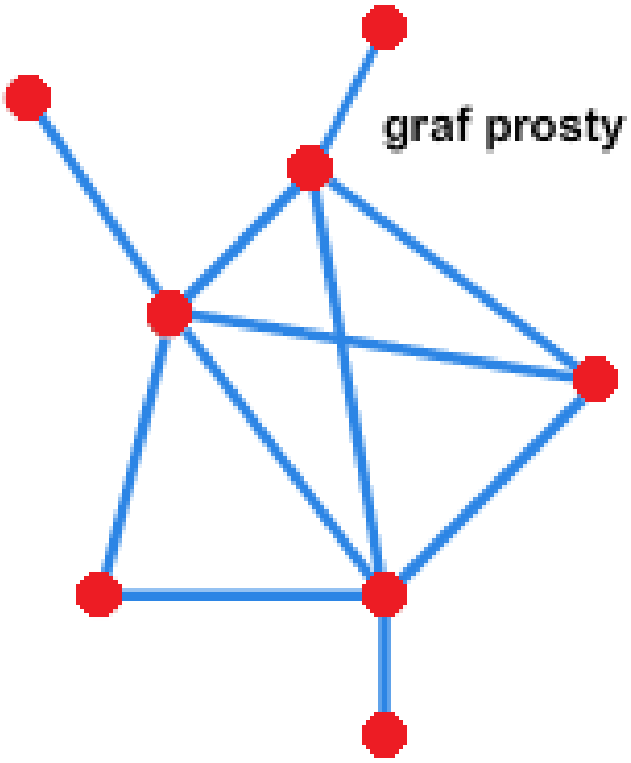
V jest zbiorem *wierzchołków*,

E jest rodziną *krawędzi*, między różnymi wierzchołkami, które nie mogą być wielokrotne,
dokładniej E jest rodziną dwuelementowych podzbiorów V.

Zatem nie są dopuszczane pętle oraz krawędzie wielokrotne.

graf ogólny





Graf

Oznaczenie 3

Krawędź łączącą **v** z **w** oznaczamy **vw** .

Uwaga 4

Jeśli istnieje krawędź vw, to wierzchołki v, w nazywamy sąsiadami oraz mówimy, że krawędź vw jest incydentna do v odpowiednio do w.

Graf

Oznaczenie 5

Dla grafu G symbolem $V(G)$ oznaczamy zbiór wierzchołków, symbolem $E(G)$ zbiór krawędzi.

Graf

Definicja 6

Stopień wierzchołka v w grafie G to liczba krawędzi incydentnych z v. Oznaczenie $\deg v$.

Twierdzenie 7

Jeśli $G = (V, E)$ jest grafem ogólnym, to

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2|E|. \tag{1}$$

Dowód

W przypadku grafu prostego:
Każda krawędź jest incydentna do dwóch wierzchołków. Zatem sumując $\deg v$ czyli liczby krawędzi incydentnych do kolejnych wieżchołków v grafu otrzymamy podwojoną liczbę krawędzi grafu.
W przypadku grafu ogólnego:
Krawędź, która wychodzi z wierzchołka v i prowadzi do wierzchołka tego samego v zwiększa $\deg v$ o 2.
Zatem sumując $\deg v$ nadal otrzymamy podwojoną liczbę krawędzi grafu.

Wniosek 8

Liczba wierzchołków o nieparzystym stopniu jest parzysta.

Dowód

Jeśli G miałby nieparzyście wiele wierzchołków o nieparzystym stopniu to suma $\sum_{v \in V} \deg v$ byłaby nieparzysta co przeczy temu, że wynosi ona $2|E|$.

Graf

Definicja 9

Niech $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$ grafy. Wtedy:

1. Suma grafów G_1 i G_2 to graf $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2,\ E_1 \cup E_2)$.
2. Iloczyn grafów G_1 i G_2 to graf $G_1 \cap G_2 = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$.
3. Różnica, grafów G_1, G_2 to graf $G_1 \setminus G_2 = (V_1 \setminus V_2, E_1 \setminus E_2)$.

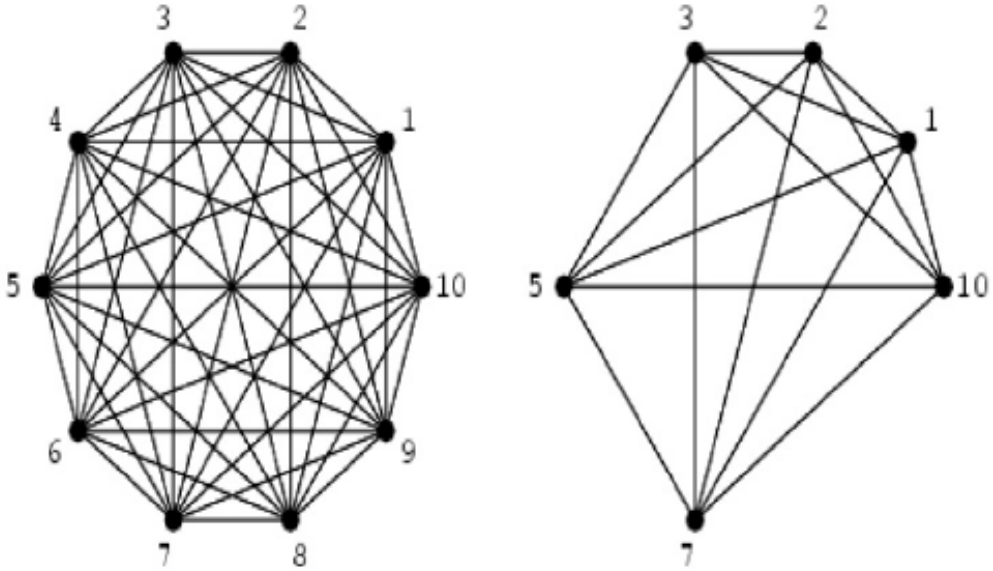
Graf

Definicja 10

Niech $G = (V, E)$ graf. Wtedy:

1. **Podgraf grafu** G to graf H, w którym $V(H) \subseteq V(G)$ i $E(H) \subseteq E(G)$.
2. **Restrykcja grafu** G do podzbioru $X \subseteq V$ to graf $G|_X = (X, \{u, v : u, v \in X\} \cap E)$.
   Graf $H = G|_{V_H}$ będący restrykcją grafu G do podzbioru $V_H \subseteq V$ nazywamy **podgrafem indukowanym**.

Podgrafem indukowanym $H = (V_H, E_H)$ grafu $G = (V, E)$, nazywamy graf, w którym $V_H \subset V$ oraz $E_H = \{\{u, v\} : u, v \in V_H \text{ oraz } \{u, v\} \in E\}$



podgraf indukowany $G[1, 2, 3, 5, 7, 10]$

Definicja 11

Niech $G = (V, E)$ graf. Wtedy:

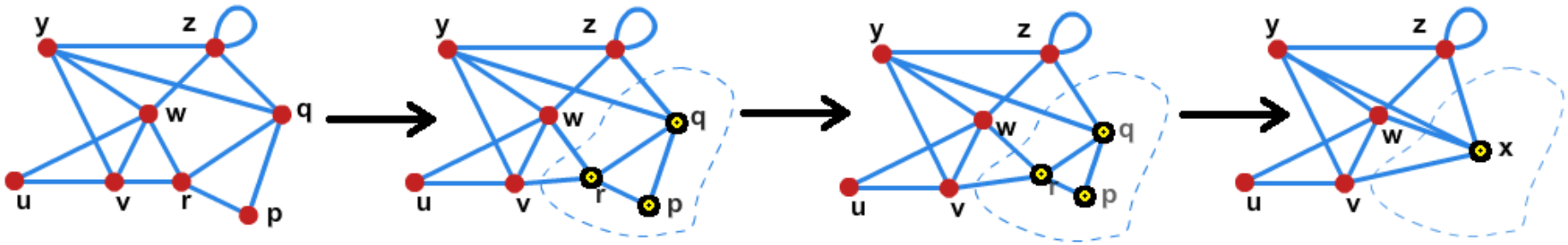
1. **Iloraz grafu** G przez relację równoważności $\theta \subseteq V \times V$ na zbiorze jego wierzchołków to graf postaci

$$G/\theta = (V/\theta, \{\{v/\theta, w/\theta\} : \{v, w\} \in E\}). \tag{2}$$

2. Szczególny przypadek ilorazu grafu G przez relacje równoważności w której:
   a. wszystkie klasy abstrakcji wieżchołków spoza zbioru $X \subseteq V$ są jednoelementowe,
   b. zbór X stanowi jedną klasę abstrakcji

   nazywamy **ściągnięciem** zbioru wierzchołków X w grafie G.

Przykład 12



Uwaga 13 J

eśli $\theta \subseteq V \times V$ jest relacją równoważności o klasach $X_1, \ldots, X_k$ to ściągając w grafie G kolejno zbiory $X_1, \ldots, X_k$ otrzymamy graf ilorazowy G/θ.

Graf skierowany (lub inaczej *digraf*) to para $\mathbf{D} = (V, E)$, gdzie

- V jest zbiorem *wierzchołków*,
- E jest zbiorem *krawędzi skierowanych*, czyli $E \subseteq V \times V$.

Uwaga

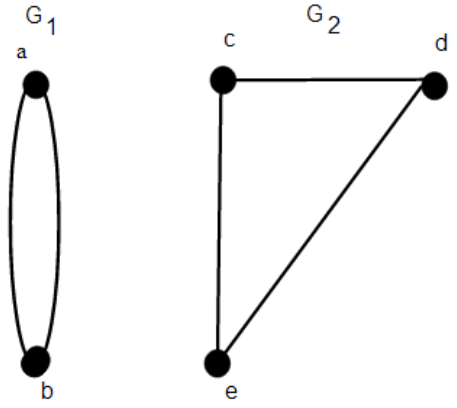
Krawędź digrafu (czyli uporządkowaną parę) vw graficznie przedstawiamy jako strzałkę $v \bullet\!\!\longrightarrow\!\!\bullet\ w$.

Graf szkieletowy digrafu $\mathbf{D}$ to graf otrzymany z $\mathbf{D}$ poprzez zaniedbanie (usunięcie) kierunku krawędzi, ale nie samych krawędzi.

Niech będą dane grafy proste $G_1 = (V_1, E_1)$ oraz $G_2 = (V_2, E_2)$. Wówczas

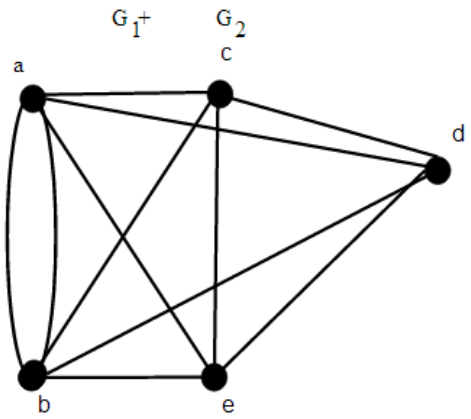
Definicja

Graf $G = (V, E)$ nazywamy **sumą grafów** G_1 i G_2 i oznaczamy $G = G_1 \cup G_2$, gdy $V = V_1 \cup V_2$ oraz $E = E_1 \cup E_2$



Definicja

Graf $G = (V, E)$ nazywamy **zespoleniem grafów** G_1 i oznaczmy G_2
$G = G_1 + G_2$, gdy $V = V_1 \cup V_2$ oraz
$E = E_1 \cup E_2 \cup \{\{v_1, v_2\} : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$

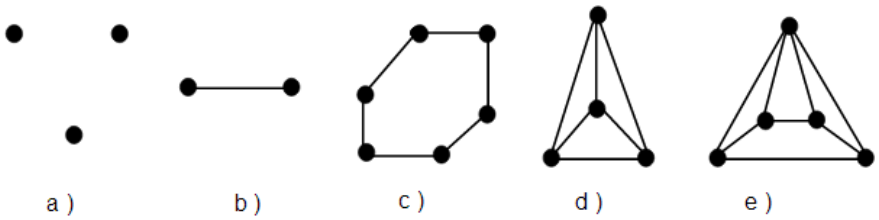


Twierdzenie

Jeśli $G = G_1 + G_2$, to $|V| = |V_1| + |V_2|$ oraz $|E| = |E_1| + |E_2| + |V_1| * |V_2|$.

Definicja

Graf prosty, w którym wszystkie wierzchołki mają ten sam stopień nazywamy **grafem regularnym**.
Jeżeli każdy wierzchołek grafu ma stopień r, to graf ten nazywamy **grafem regularnym stopnia r** lub **grafem r-regularnym**. Graf regularny stopnia 3 nazywamy **grafem kubicznym**.



Własność

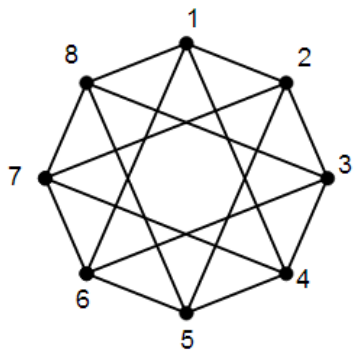
Graf r-regularny o n wierzchołkach posiada $\frac{nr}{2}$ krawędzi.

Definicja

k-regularny graf G nazywamy grafem **k-silnie regularnym**, jeżeli istnieją nieujemne liczby λ i μ takie, że

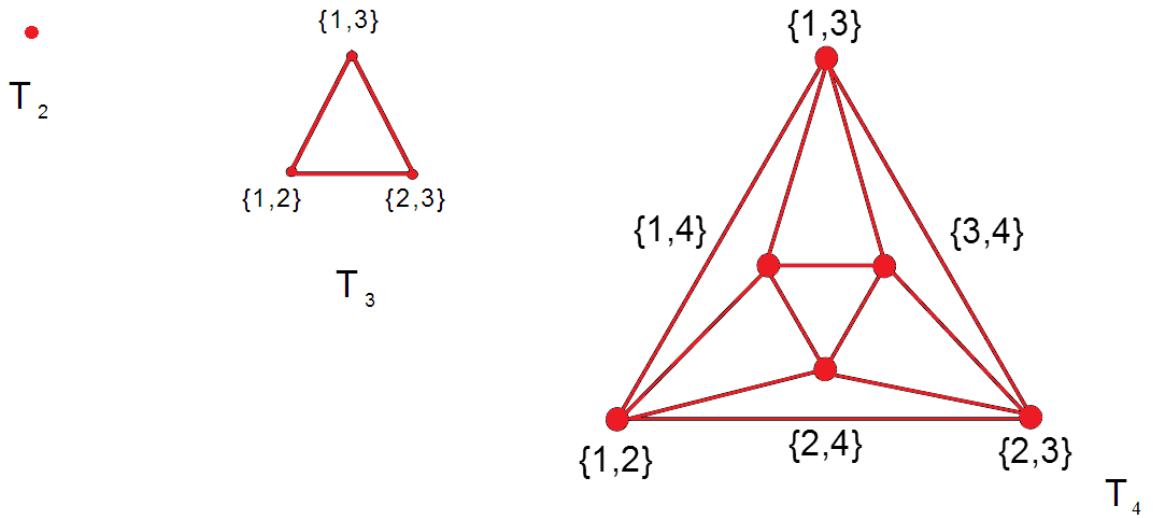
1. dla każdej pary wierzchołków u i v **połączonych krawędzią** istnieje dokładnie λ wierzchołków **połączonych jednocześnie** z u i v,
2. dla każdej pary wierzchołków u i v **nie połączonych krawędzią** istnieje dokładnie μ wierzchołków **połączonych jednocześnie** z u i v

Grafy k-silnie regularne charakteryzuje ciąg (n, k, λ, μ)



$(8, 4, 0, 4)$

Grafem trójkątnym T_n nazywamy graf prosty, którego wierzchołki odpowiadają wzajemnie jednoznacznie dwuelementowym podzbiorom zbioru $n-$elementowego oraz każde dwa wierzchołki połączone są krawędzią wtedy i tylko wtedy gdy **przecięcie odpowiadających im zbiorów jest niepuste**.



Własności grafu T_n

i) Graf T_n ma $|V| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ wierzchołków.

ii) Stopień dowolnego wierzchołka wynosi $2n-4$.

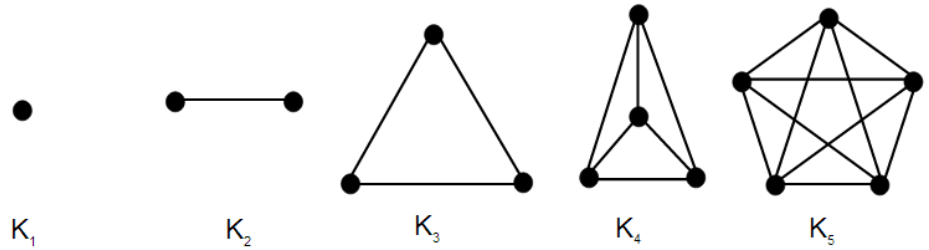
iii) $n-2$ jest liczbą wierzchołków sąsiednich jednocześnie do u i v, jeżeli u i v są sąsiednie.

iv) 4 jest to liczbą wierzchołków sąsiednich do u i v, jeżeli u i v nie są sąsiednie.

v) Grafy trójkątne są grafami silnie regularnymi, które charakteryzuje ciąg

$$\left(\binom{n}{2}, 2n-4, n-2, 4\right)$$

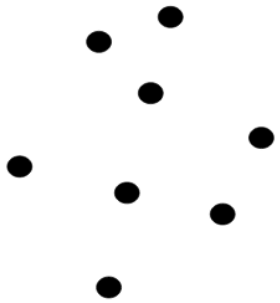
Graf prosty, w którym każda para wierzchołków jest połączona krawędzią nazywamy **grafem pełnym** . Graf pełny o n wierzchołkach oznaczmy symbolem K_n.



Stopień każdego wierzchołka w grafie pełnym K_n wynosi $n-1$.

Graf pełny K_n ma $|E_{K_n}| = \dfrac{n(n-1)}{2}$ krawędzi.

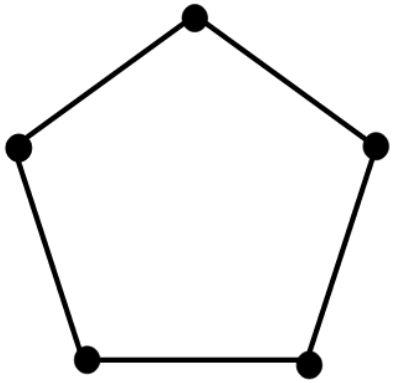
Grafem pustym nazywamy graf, którego zbiór krawędzi jest pusty (nie jest pusty zbiór wierzchołków, czyli $|V| > 0$ oraz $|E| = 0$). Graf pusty mający n wierzchołków oznaczamy symbolem N_n.



Graf N_n składa się z n wierzchołków izolowanych.

Graf N_n jest grafem regularnym stopnia 0.

Graf spójny regularny stopnia 2 nazywamy **grafem cyklicznym**. Graf cykliczny mający n wierzchołków oznaczamy symbolem C_n.

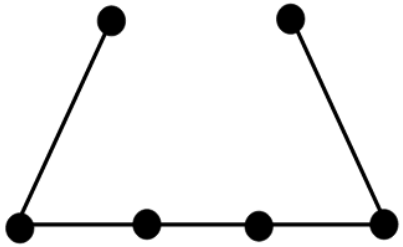


C_5

W grafie cyklicznym każde dwie sąsiednie krawędzie są połączone szeregowo.

Graf cykliczny C_n posiada n krawędzi.

Jeżeli z grafu C_n usuniemy dokładnie jedną krawędź, to otrzymany graf nazywamy **grafem liniowym** o n wierzchołkach i oznaczamy symbolem P_n.

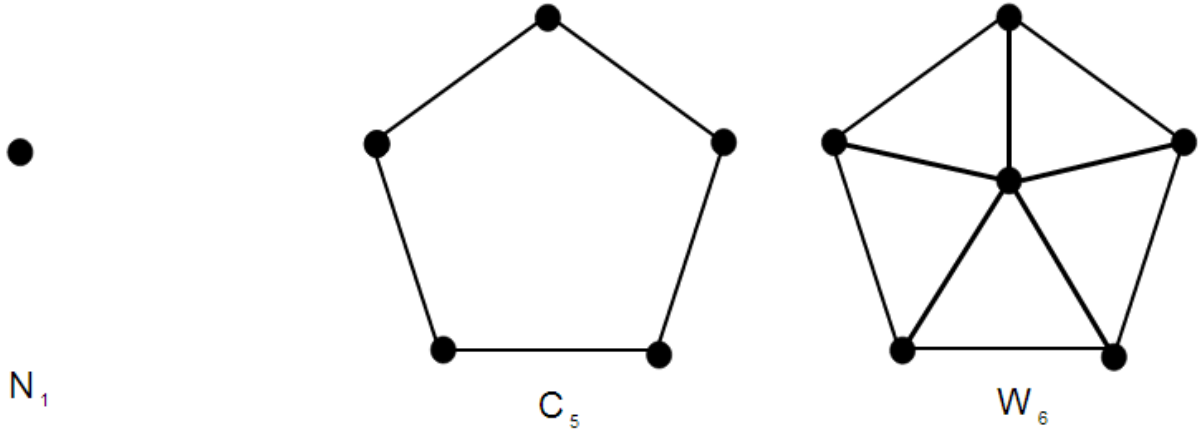


P_6

Graf P_n nie jest grafem regularnym.

Graf P_n posiada zawsze 2 wierzchołki stopnia pierwszego, a pozostałe $n-2$ wierzchołki są stopnia drugiego.

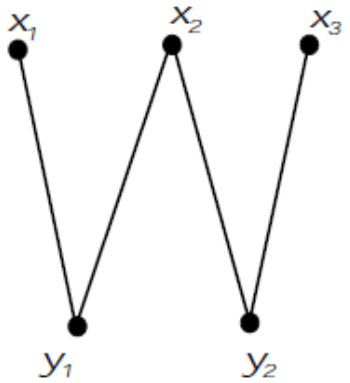
Kołem W_n nazywamy graf $W_n = C_{n-1} + N_1$.

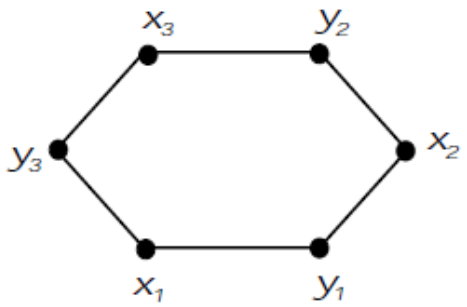


$$W_6 = C_5 + N_1$$

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem prostym.

Graf G jest **grafem dwudzielnym**, jeśli zbiór wierzchołków V jest sumą dwóch niepustych zbiorów rozłącznych V_1 i V_2, takich, że każda krawędź tego grafu łączy wierzchołek ze zbioru V_1 z wierzchołkiem ze zbioru V_2.

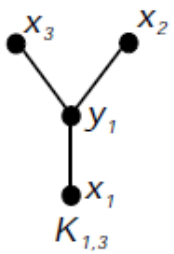




Jeżeli graf G jest grafem dwudzielnym, to każdy cykl w G ma długość parzystą.

Niech $V = V_1 \cup V_2$ oraz niech $v_0 v_1 v_2 \ldots v_m v_0$ będzie cyklem w G. Załóżmy, bez straty ogólności, że $v_0 \in V_1$, wtedy $v_1 \in V_2$, $v_2 \in V_1$, itd. Ponieważ cykl jest długości m oraz $v_m \in V_2$, więc cykl ma długość parzystą.

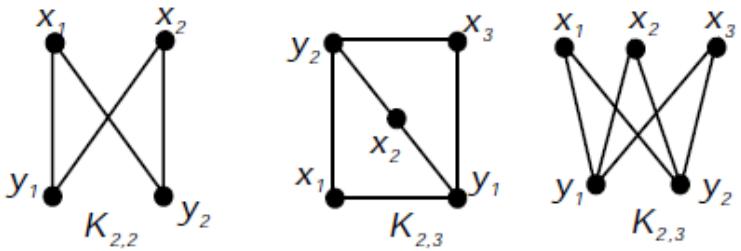
Graf dwudzielny jest **pełnym grafem dwudzielnym**, jeśli każdy wierzchołek zbioru V_1 jest połączony z każdym wierzchołkiem zbioru V_2 dokładnie jedną krawędzią. Graf pełny dwudzielny, w którym $|V_1| = r$ i $|V_2| = s$ oznaczamy symbolem $K_{r,s}$.

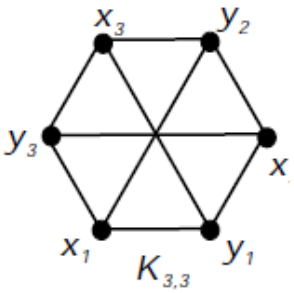


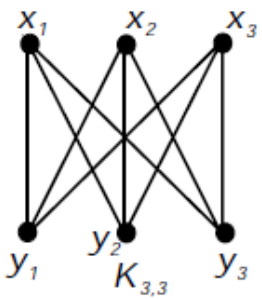
$K_{r,s} = N_r + N_s$

Każdy graf $K_{r,s}$ ma $r + s$ wierzchołków.

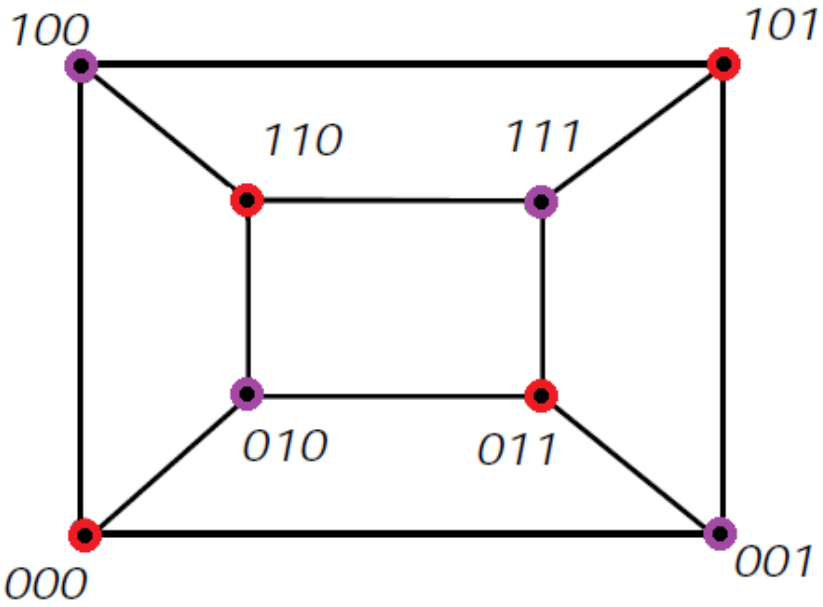
Każdy graf $K_{r,s}$ ma $r \cdot s$ krawędzi.



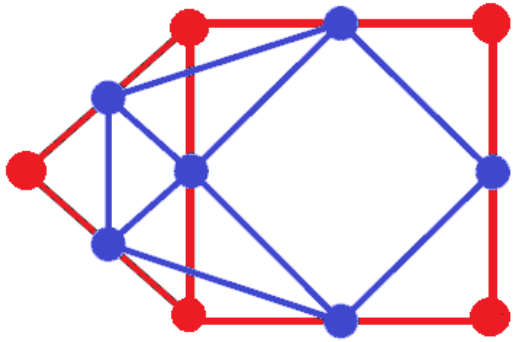




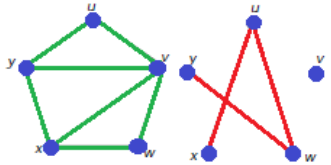
Graf, którego wierzchołki odpowiadają ciągom binarnym $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, oraz którego krawędzie łączą ciągi różniące się dokładnie jednym wyrazem nazywamy $n-$**kostką** Q_n.



Grafem krawędziowym $L(G)$ **grafu** G, nazywamy graf, którego wierzchołki odpowiadają wzajemnie jednoznacznie krawędziom G oraz dowolne dwa wierzchołki w grafie $L(G)$ są sąsiednie wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im krawędzie są sąsiednie w G.



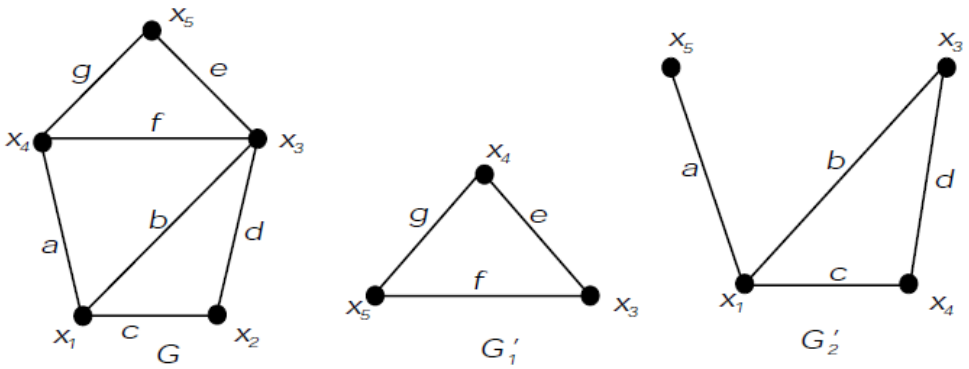
Dopełnieniem grafu $G = (V, E)$ nazywamy graf $\overline{G}$, którego zbiór wierzchołków jest taki sam, jak grafu G oraz w którym dwa wierzchołki są sąsiednie wtedy i tylko wtedy, gdy nie są sąsiednie w grafie G.



Dopełnieniem grafu pełnego K_n jest graf pusty N_n.

Dopełnieniem grafu pełnego dwudzielnego $K_{r,s}$ są dwa grafy pełne K_r i K_s.

Graf $H = \langle V_H, E_H \rangle$ jest **podgrafem grafu** $G = \langle V_G, E_G \rangle$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki: $V_H \subset V_G$, $E_H \subset E_G$.



Każdy graf jest swoim własnym podgrafem.

Podgraf G'' podgrafu G' grafu G jest podgrafem grafu G tzn

$$(G' \subset G \wedge G'' \subset G') \Rightarrow G'' \subset G.$$

Pojedynczy wierzchołek grafu G jest podgrafem grafu G.

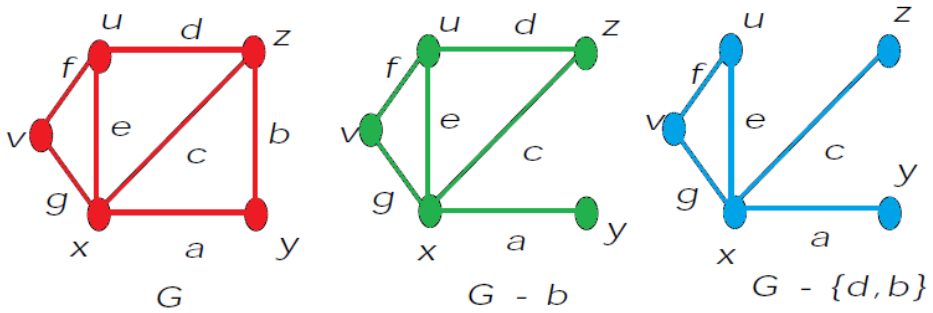
Pojedyncza krawędź grafu G łącznie z jej końcami jest podgrafem grafu G.

Każdy graf prosty G o n-wierzchołkach jest podgrafem grafu pełnego K_n.

Liczba wszystkich różnych grafów prostych zawierających n wierzchołków jest równa $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$

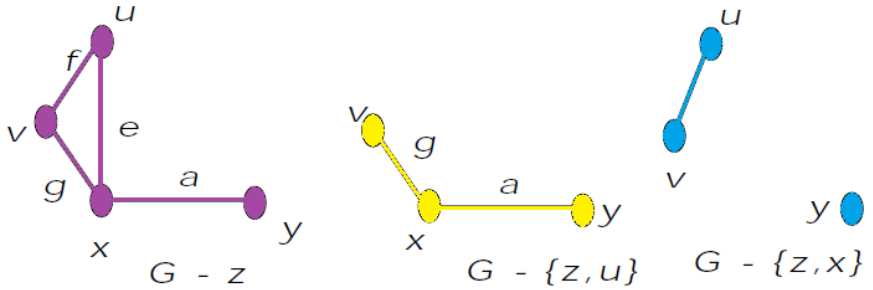
Niech dany będzie graf $G = \langle V, E \rangle$ i krawędź $e \in E$.

$G - e$ oznacza podgraf otrzymany z grafu G przez usunięcie krawędzi e.
Niech F będzie dowolnym podzbiorem zbioru krawędzi grafu G ($F \subset E$), wówczas $G - F$ oznacza podgraf grafu G powstały przez usunięcie wszystkich krawędzi należących do zbioru F.

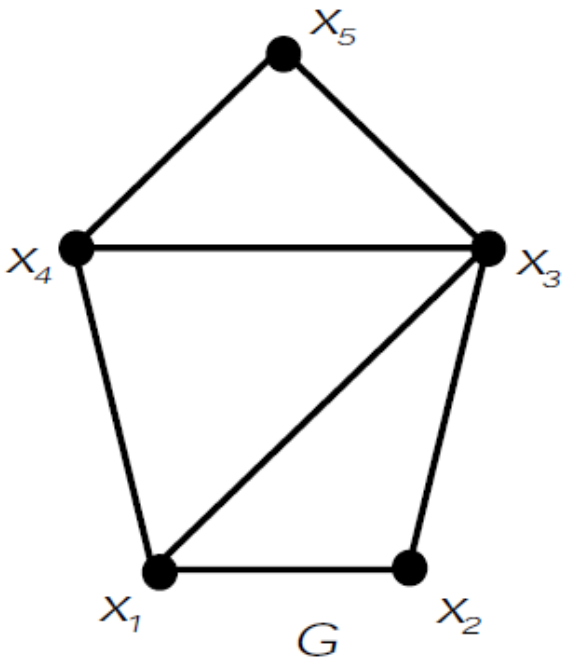


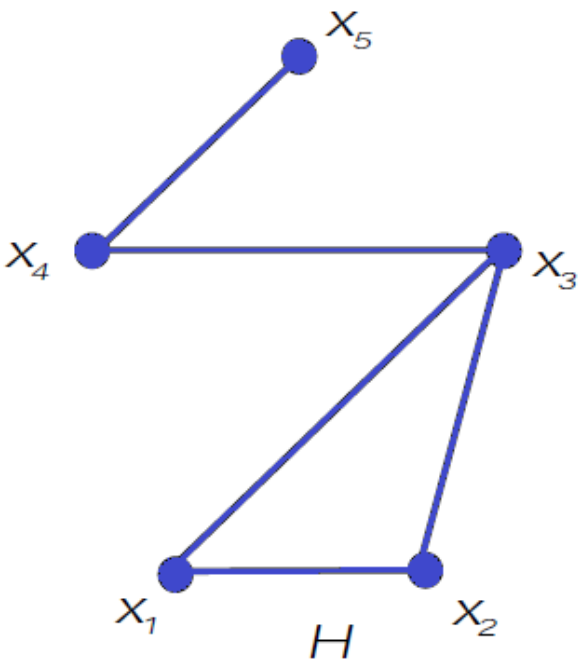
Niech dany będzie graf $G = \langle V, E \rangle$ i niech wierzchołek $v \in V$.

$G - v$ oznacza podgraf grafu G otrzymany z G przez usunięcie wierzchołka v i wszystkich krawędzi do niego incydentnych.
Jeżeli S jest dowolnym podzbiorem zbioru wierzchołków V grafu G ($S \subset V \wedge S \neq V$), to $G - S$ oznacza graf, który otrzymamy z grafu G przez usunięcie wszystkich wierzchołków należących do zbioru S i wszystkich krawędzi incydentnych do dowolnego wierzchołka ze zbioru S.

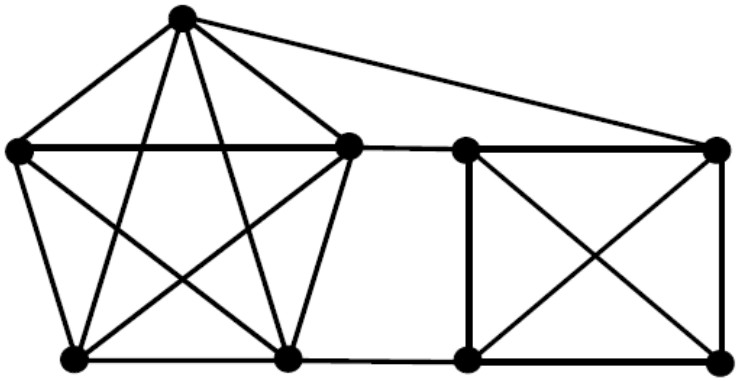


Graf H nazywamy **grafem częściowym lub grafem spinającym** grafu G jeżeli jest podgrafem G i $V_H = V_G$.

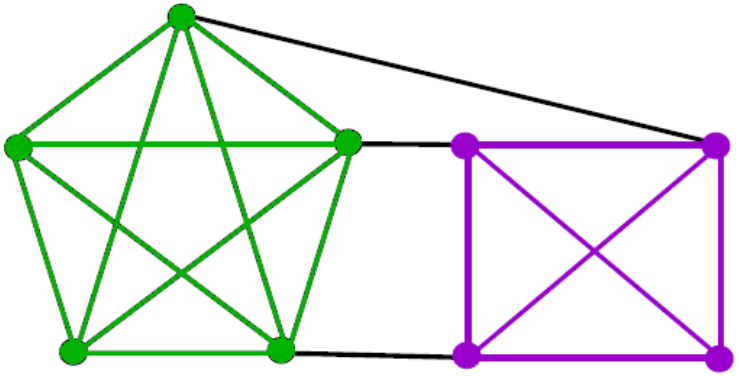




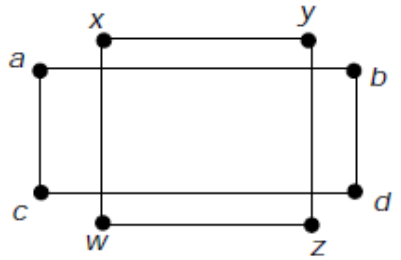
Kliką nazywamy podgraf, w którym każde dwa wierzchołki są połączone krawędzią.



Klikę nazywamy maksymalną, jeśli nie da się dodać do niej wierzchołka tak, aby razem z nią również tworzył klikę.
Klikę nazywamy największą (najliczniejszą), jeśli nie ma w grafie kliki o większej liczbie wierzchołków.
Ilość wierzchołków największej kliki oznaczamy przez $\omega(G)$.



Każdy spójny podgraf G_1 grafu G ($G_1 \subset G$), który nie jest zawarty w większym (w sensie relacji zawierania zbioru wierzchołków oraz zawierania zbioru krawędzi) spójnym podgrafie grafu G nazywamy **składową spójną grafu** G.



Oczywiście każdy wierzchołek izolowany danego grafu jest jego spójna składową.

Spójny graf o n wierzchołkach, posiada co najmniej $n-1$ krawędzi.

Ilość krawędzi m w grafie prostym i spójnym o n wierzchołkach, spełnia zależność

$$n-1 \leq m \leq \frac{n(n-1)}{2}$$

Niech G będzie grafem prostym o n wierzchołkach. Jeżeli graf G ma k składowych, to liczba m jego krawędzi spełnia nierówność

$$n-k \leq m \leq \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$$

Każdy graf prosty, który ma n wierzchołków i więcej niż $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ krawędzi jest spójny.

Droga, pętla, droga zamknięta, droga, prosta, ścieżka prosta, cykl

Drogą T długości n nazywamy ciąg krawędzi $e_1 e_2 \dots e_n$, oraz wierzchołków $v_1 v_2 \dots v_{n+1}$, takich, że $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$.
Jeśli $v_i = v_{i+1}$ to krawędź e_i w drodze T jest pętlą.
W drodze krawędzie mogą się powtarzać.
W drodze wierzchołki mogą się powtarzać.

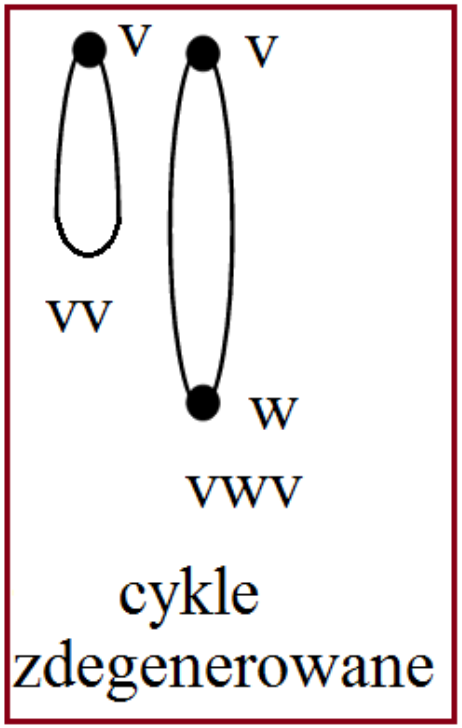
Drogą zamkniętą długości n nazywamy ciąg krawędzi $e_1 e_2 \dots e_n$, oraz wierzchołków $v_1 v_2 \dots v_{n+1}$, takich, że $v_1 = v_{n+1}$.
W drodze zamkniętej krawędzie mogą się powtarzać.
W drodze zamkniętej wierzchołki mogą się powtarzać.

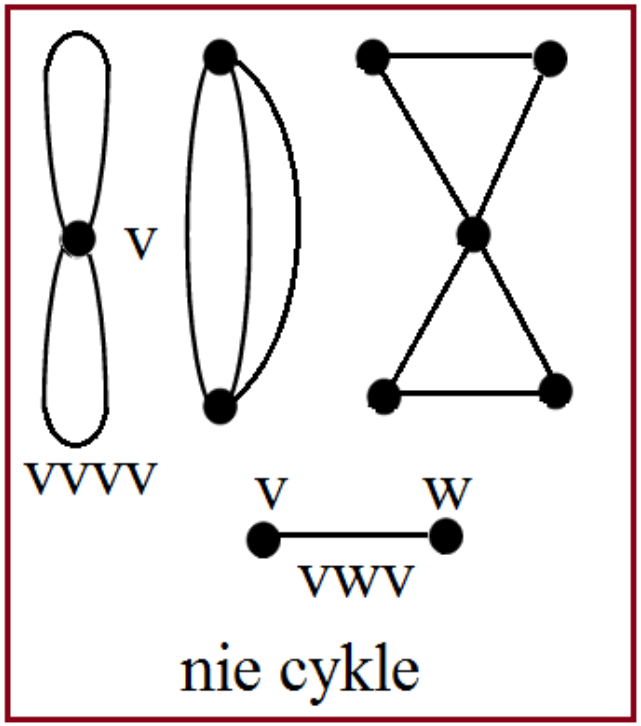
Drogą prostą P długości n nazywamy ciąg różnych krawędzi $e_1 e_2 \ldots e_n$, oraz wierzchołków $v_1 v_2 \ldots v_{n+1}$, takich, że $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$.
Jeśli $v_i = v_{i+1}$ to krawędź e_i w drodze prostej P jest pętlą.
W drodze prostej krawędzie nie mogą się powtarzać.
W drodze prostej wierzchołki mogą się powtarzać.

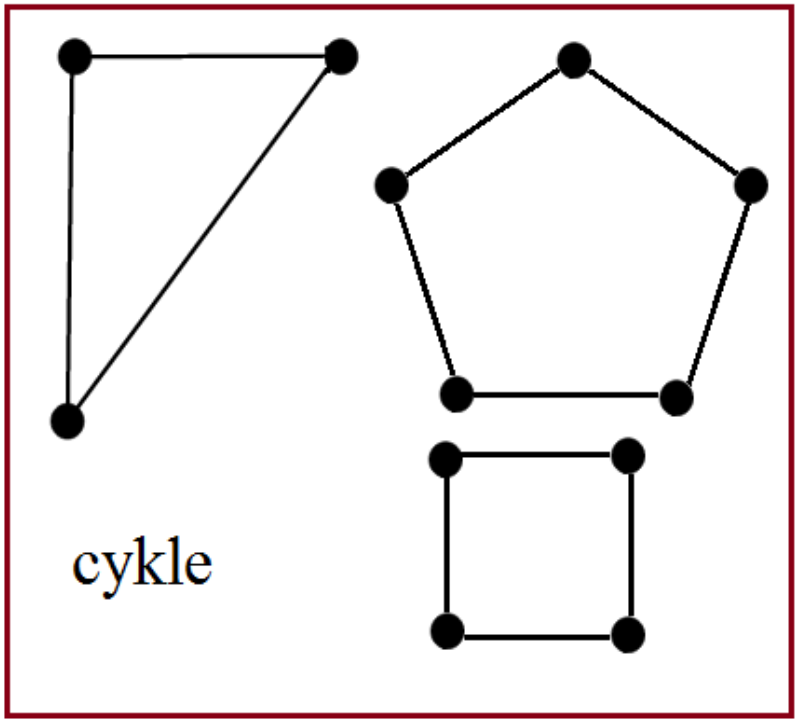
Ścieżką prostą S długości n nazywamy ciąg różnych krawędzi $e_1 e_2 \dots e_n$, oraz ciąg różnych wierzchołków $v_1 v_2 \dots v_{n+1}$, takich, że $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$.
W ścieżce prostej krawędzie nie mogą się powtarzać.
W ścieżce prostej wierzchołki nie mogą się powtarzać.

Cyklem C długości n nazywamy ciąg różnych krawędzi $e_1 e_2 \dots e_n$, oraz ciąg różnych wierzchołków $v_1 v_2 \dots v_{n+1}$, takich, że $v_1 = v_{n+1}$.
Przy czym zakładamy, że $n \geq 3$.
Jeżeli $n = 2$ to cykl jest zdegenerowany do dwóch wierzchołków z krawędzią podwójną.
Jeżeli $n = 1$ to cykl jest zdegenerowany do wierzchołka z pętlą.
Przypadki $n = 1, n = 2$ będziemy nazywać cyklami zdegenerowanymi.
W cyklu krawędzie nie mogą się powtarzać.
W cyklu wierzchołki $v_1, v_2, \dots, v_n$ nie mogą się powtarzać.

Przegląd







Twierdzenie 14

Każda droga zamknięta $e_1 \dots e_n$ długości co najmniej 3, o różnych wierzchołkach $v_1 v_2 \dots v_n$ jest cyklem.

Twierdzenie 15

Droga ma wszystkie wierzchołki różne wtedy i tylko wtedy gdy jest prosta i nie zawiera cykli ani cykli zdegenerowanych (jest acykliczna).

Twierdzenie 16

Jeśli u oraz v to wierzchołki połączone drogą w grafie G to istnieje w grafie G droga z u do v, która jest prosta i acykliczna.

Wniosek 17

Jeżeli e to krawędź w zamkniętej drodze prostej w grafie G to istnije cykl w grafie G, który zawiera e.

Twierdzenie 18

Jeśli u oraz v to różne wierzchołki grafu acyklicznego (graf bez cykli i bez cykli zdegenerowanych) G. Wtedy istnieje co najwyżej jedna droga prosta w G z u do v.

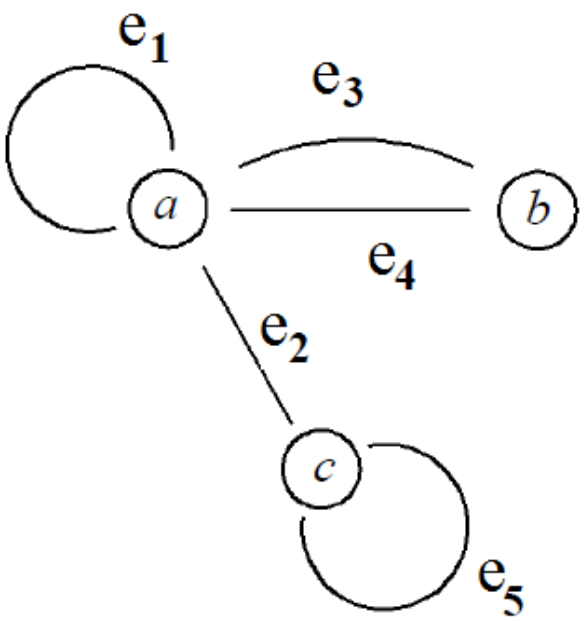
Reprezentacje grafu prostego

Pierwszą reprezentacją grafu jest lista nazw wierzchołków, gdzie po każdej nazwie wierzchołka występuje lista nazw jego wierzchołków sąsiednich.

Drugą reprezentacją jest **macierz sąsiedztwa**. Dla grafu o n wierzchołkach jest to macierz $n \times n$, której wyraz o indeksach i, j jest równy liczbie krawędzi łączących wierzchołek i-ty z j-tym.

Trzecią reprezentacją jest **macierz incydencji**. Dla grafu o n wierzchołkach i m krawędziach jest to macierz $n \times m$, której wyraz o indeksach i, j jest równy 1 jeżeli wierzchołek i-ty jest incydenty z krawędzią j-tą, oraz 0 w przeciwnym razie.

Reprezentacje grafu ogólnego



Lista nazw

a abbc
b aa
c ca

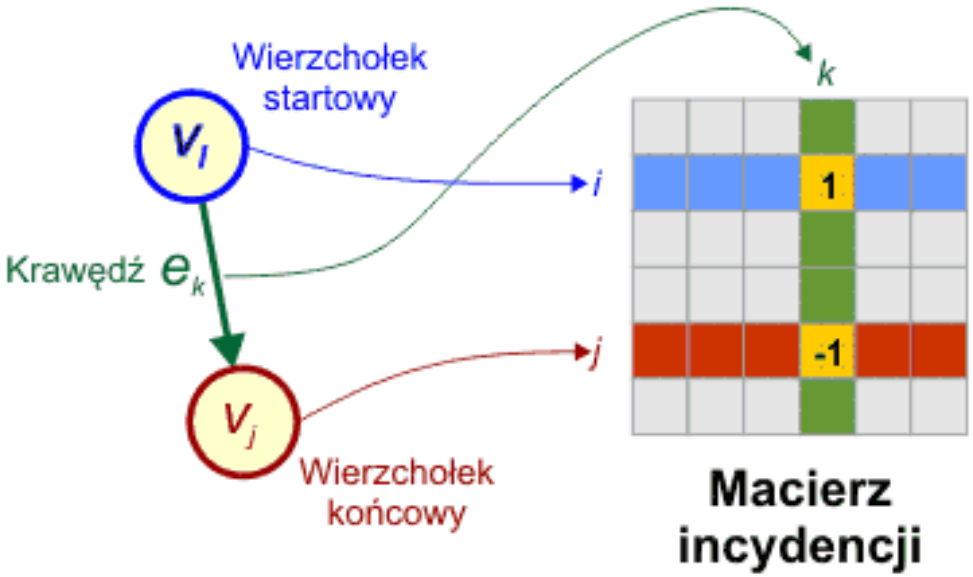
Macierz sąsiedztwa

$$\begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & 1 & 2 & 1 \\ b & 2 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Macierz incydencji

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline a & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Reprezentacje prostego grafu skierowanego



Skojarzenia

Skojarzenie w grafie dwudzielnym $G(V_1 \cup V_2, E)$ to podzbiór krawędzi, w którym żadne dwie krawędzie nie wychodzą z tego samego wierzchołka.

Skojarzenia

Powiemy, że wierzchołek $v \in V_i$ **jest skojarzony**,

jeśli istnieje $w \in V_{3-i}$ taki, że krawędź vw należy do skojarzenia.

Skojarzenia

Pełne skojarzenie V_1 z V_2 w grafie dwudzielnym $G(V_1 \cup V_2, E)$ to skojarzenie, w którym każdy wierzchołek z V_1 jest skojarzony.

Twierdzenie Halla

Hall wprowadza **funkcję $\Phi(A)$** zwracającą dla $A \subseteq V_1$ zbiór tych wierzchołków V_2, które są sąsiednie z przynajmniej jednym wierzchołkiem w zbiorze A.

Twierdzenie Halla

Niech $G(V_1 \cup V_2, E)$ będzie grafem dwudzielnym. Wówczas pełne skojarzenie V_1 z V_2 istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $|A| \leq |\Phi(A)|$ dla każdego podzbioru A zbioru V_1.

Homeomorfizm

Dwa grafy G, H są homeomorficzne jeśli można je otrzymać z grafu K poprzez skończony ciąg ruchów elementarnego podpodziału.
Pojedynczy ruch elementarnego podziału na krawędzi $\{u, v\} \in E(K)$ polega na zastąpieniu krawędzi $\{u, v\}$ dwoma krawędziami $\{u, w\}$ oraz $\{w, v\}$.
Oznacza to że dodajemy do zbioru $V(K)$ wierzchołek w,
usuwamy z $E(K)$ krawędź $\{u, v\}$, a dodajemy krawędzie $\{u, w\}$ oraz $\{w, v\}$.

Izomorfizm

Niech G, H będą grafami w których krawędziami są jedno lub dwuelementowe podzbiory wierzchołków.
(Zatem nie dopuszczamy krawędzi wielokrotnych, w szególności pętli wielokrotnych, a dopuszczamy pojedyncze pętle)

Definicja 19

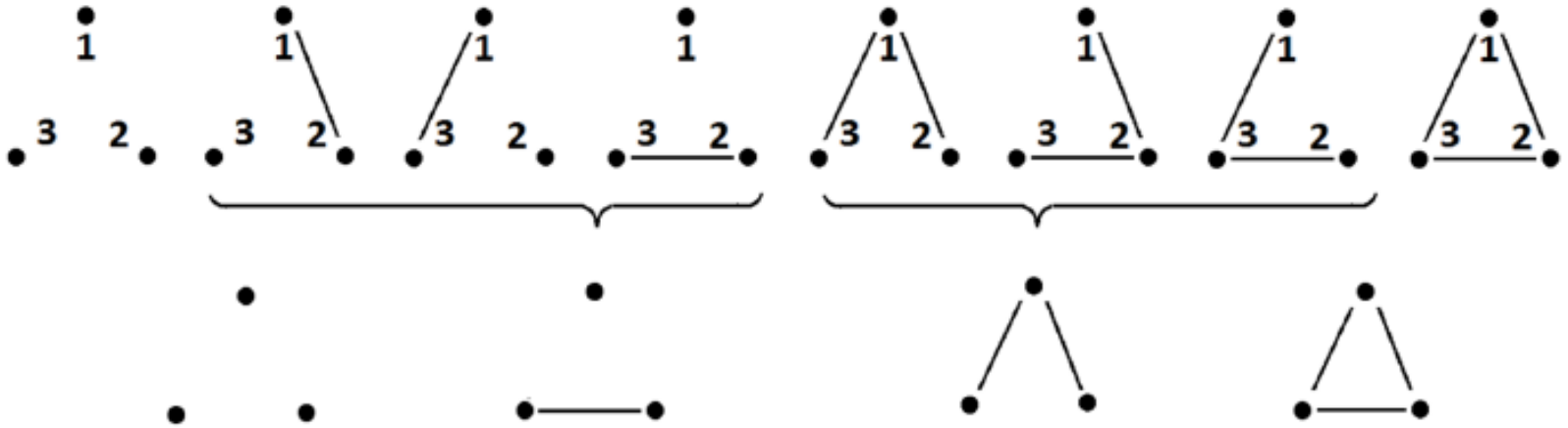
Izomorfizmem grafu G na graf H nazywamy przekształcenie wzajemnie jednoznaczne (bijekcja) $\varphi : V(G) \mapsto V(H)$,:

$$\{u, v\} \in E(G) \Leftrightarrow \{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E(H).$$

Mówimy, wtedy, że grafy G i H są izomorficzne, i piszemy $G \simeq H$.

Izomorfizm

Izomorficzność pozwala na zajmowanie się grafami oznakowanymi bądź nieoznakowanymi. Graf nieoznakowany reprezentuje wszystkie izomorficzne grafy oznakowane, np.:



Izomorfizm

Niech G, H będą grafami ogólnymi (Zatem dopuszczamy krawędzie wielokrotne, w szególności pętle wielokrotne)

Definicja 20

Powiemy, że grafy G oraz H są izomorficzne. Jeśli istnieją dwie bijekcje $\varphi : V(G) \mapsto V(H)$, oraz $\psi : E(G) \mapsto E(H)$, takie, że krawędź $e \in E(G)$ jest incydentna do $u, v \in V(G)$ wtw. gdy krawędź $\psi(e) \in E(H)$ jest incydentna do $\varphi(u), \varphi(v) \in V(H)$.

Etykietowanie

Definicja 21

Graf etykietowany, to graf ze standardowymi etykietami wierzchołków (zazwyczaj $v_1, v_2, \ldots, v_n$).

Uwaga 22

Dwa etykietowane grafy z tym samym zbiorem etykiet są utożsamiane, jeżeli są izomorficzne, tak, że izomorfizm zachowuje etykiety.

Etykietowanie

Twierdzenie 23

Liczba etykietowanych **grafów prostych**, niekoniecznie spójnych, które mają n wierzchołków oraz m krawędzi wynosi $\binom{\binom{n}{2}}{m}$.

Etykietowanie

Twierdzenie 24

Liczba etykietowanych **grafów prostych**, niekoniecznie spójnych, które mają n wierzchołków wynosi $2^{\binom{n}{2}}$.

n	$2^{\binom{n}{2}}$
1	1
2	2
3	8
4	64
5	1024
6	32768
7	2097152
8	268435456
9	68719476736
10	35184372088832
11	36028797018963968
12	73786976294838206464
13	302231454903657293676544
14	2475880078570760549798248448
15	40564819207303340847894502572032

Etykietowanie

Twierdzenie 25

Liczba etykietowanych, spójnych **grafów prostych**, które mają n wierzchołków C_n. Gdzie C_n spełnia równanie rekurencyjne

$$C_1 = 1,\ C_n = 2^{\binom{n}{2}} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} i\binom{n}{i}2^{\binom{n-1}{2}}C_i,\ n > 1.$$

n	C_n
1	1
2	1
3	4
4	38
5	728
6	26704
7	1866256
8	251548592
9	66296291072
10	34496488594816
11	35641657548953344
12	73354596206766622208
13	301272202649664088951808
14	2471648811030443735290891264
15	40527680937730480234609755344896

Grafy nieetykietowane

Twierdzenie 26

Liczba nieetykietowanych, niekoniecznie spójnych **grafów prostych**, które mają n wierzchołków G_n.
Zachodzi asymptotyczna równość

$$G_n \sim \frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!}$$

n	G_n
1	1
2	2
3	4
4	11
5	34
6	156
7	1044
8	12346
9	274668
10	12005168
11	1018997864
12	165091172592
13	50502031367952
14	29054155657235488
15	31426485969804308768
16	64001015704527557894928
17	245935864153532932683719776
18	1787577725145611700547878190848
19	24637809253125004524383007491432768

Etykietowanie

Twierdzenie 27

Liczba etykietowanych **grafów skierowanych**, które mają n wierzchołków oraz m krawędzi wynosi $\binom{2^{\binom{n}{2}}}{m}$.

Definicja 28

Graf spójny G jest $k-$wierzchołkowo spójny (lub $k-$spójny) jeśli ma więcej niż k wierzchołków i pozostaje spójny, gdy usuniemy mniej niż k wierzchołków.

Definicja 29

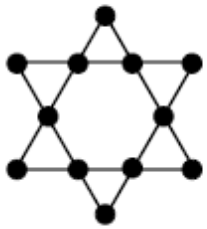
Graf spójny G jest $k-$krawędziowo spójny
jeśli ma co najmniej dwa wierzchołki i pozostaje spójny, gdy usuniemy mniej niż k krawędzi.

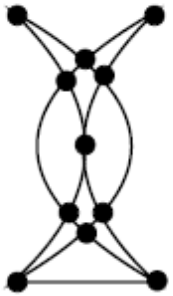
Droga i cykl Eulera, droga i cykl Hamiltona

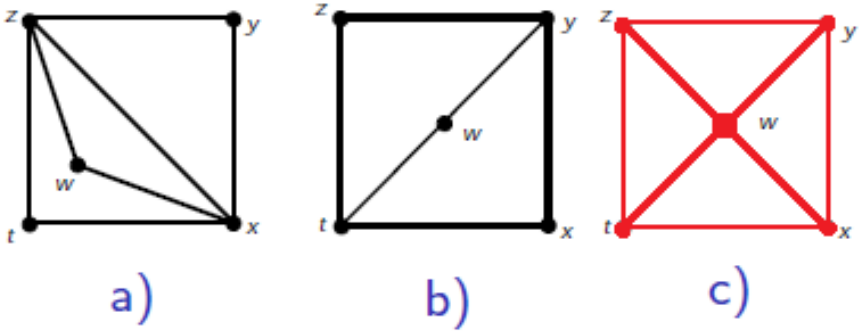
Niech G będzie grafem spójnym.

Jeżeli w grafie G istnieje zamknięta droga prosta zawierająca wszystkie krawędzie grafu, to taką drogę nazywamy **cyklem Eulera**, a graf — **grafem eulerowskim** albo **grafem Eulera**.

Jeżeli w grafie G istnieje droga prosta (nie koniecznie zamknięta) zawierająca wszystkie krawędzie grafu G, to taką drogę nazywamy **drogą Eulera**, zaś graf ten nazywamy **grafem półeulerowskim.**



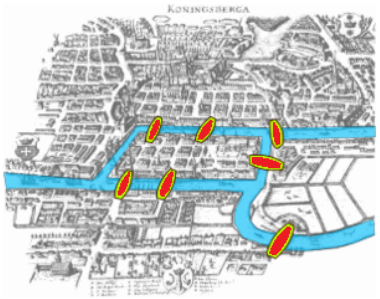


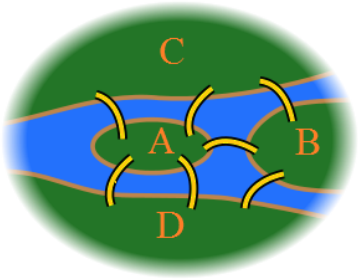


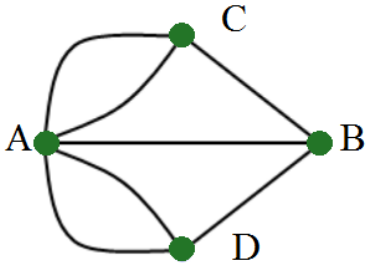
a) graf eulerowski, cykl Eulera - *txwzxyz*

b) graf półeulerowski, droga Eulera - *txywtzy*

c) graf nie posiada ani cyklu, ani drogi Eulera

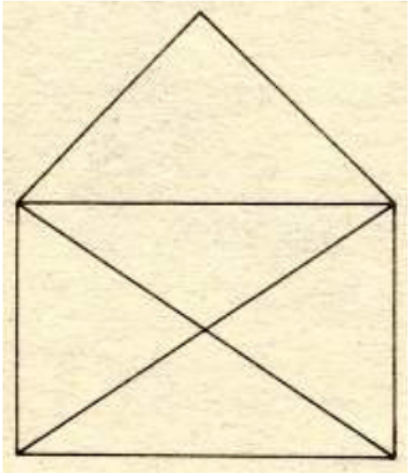




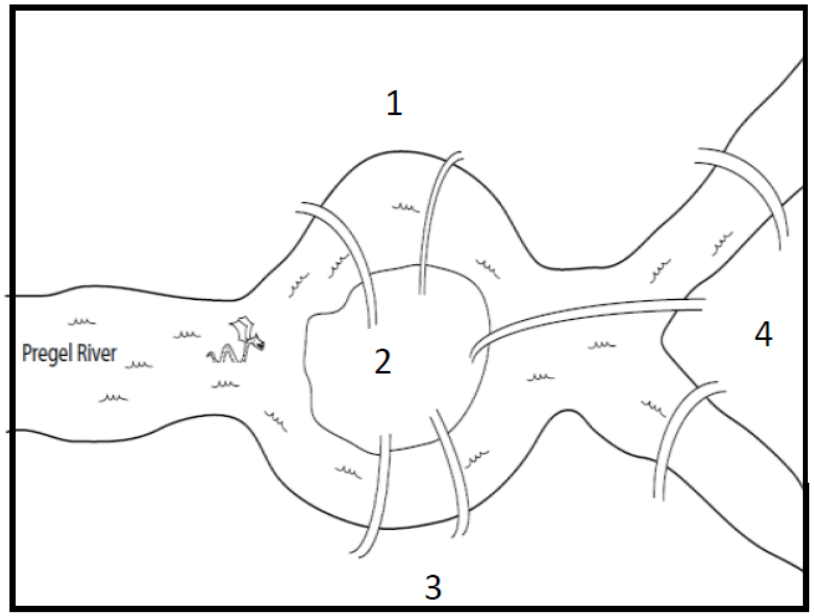


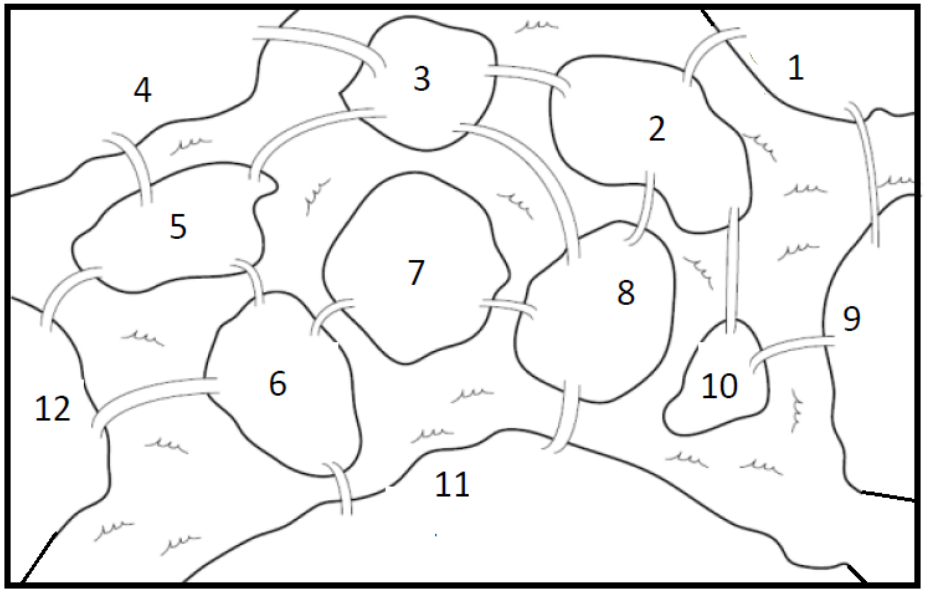
W Królewcu, na rzece Pregole są dwie wyspy A i B połączone ze sobą, a także z brzegami C i D za pomocą siedmiu mostów. Należy wyruszyć z dowolnej części lądowej miasta: A, B, C lub D, przejść przez każdy z mostów dokładnie jeden raz i powrócić do punktu wyjściowego (bez przepływania przez rzekę).

Opis zagadnienia opublikowany przez Eulera w 1741 roku w pracy *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* w *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* (wolumen 8, strony 128-140) jest uznawany za pierwszą pracę na temat teorii grafów.



Euler dowiódł, że graf jest unikursalny wtedy i tylko wtedy, gdy nie ma w nim punktów rzędu nieparzystego, lub jeśli są na nim dwa takie punkty; graf mostów królewieckich ma ich trzy; znana dobrze już dzieciom koperta ma dwa takie punkty.

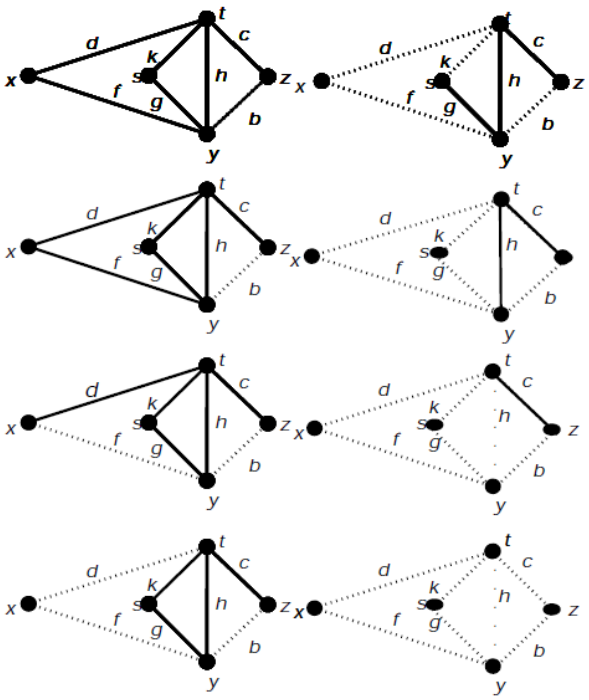

1
Pregel River
2
4
3


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

Twierdzenie Eulera

Graf spójny ma cykl Eulera $\Leftrightarrow$ gdy każdy wierzchołek ma stopień parzysty.

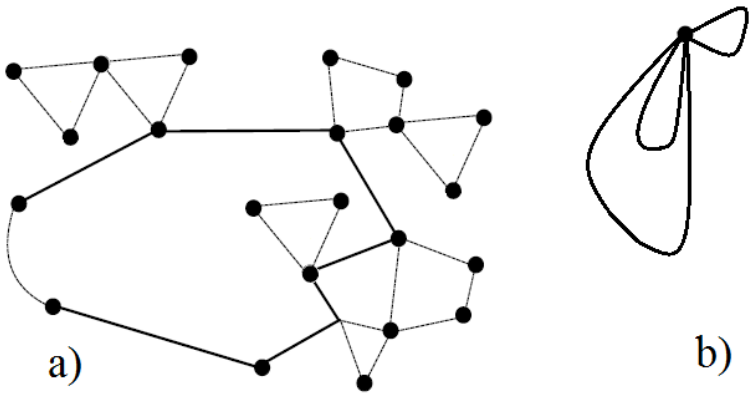
Warunek konieczny $\Rightarrow$. Jeżeli graf G ma cykl Eulera, to ma wszystkie wierzchołki stopnia parzystego.



Niech C będzie cyklem Eulera (na rysunku $C = zyxtsytz$. Załóżmy, że startujemy z pierwszego wierzchołka cyklu (na rysunku z), idziemy od wierzchołka do wierzchołka naszego cyklu i odejmujemy krawędź (może to być pętla), po której ostatnio przeszliśmy. Dla każdego wierzchołka cyklu oprócz wierzchołka pierwszego odjęcie dwóch kolejnych krawędzi cyklu incydentnych z tym wierzchołkiem zmniejsza jego stopień o dwa. Gdy powrócimy do wierzchołka startowego (na rysunku z) pozostaną w grafie jedynie wierzchołki stopnia zerowego, co oznacza, że na początku wszystkie wierzchołki miały stopień parzysty.

Warunek dostateczny $\Leftarrow$.

Jeżeli graf G ma wszystkie wierzchołki stopnia parzystego, to ma cykl Eulera.



Jeżeli graf G ma jeden wierzchołek stopnia $2m$ i $m \geq 1$ krawędzi to twierdzenie zachodzi.
Załóżmy, że $V(G) \geq 2$. Ponieważ graf jest spójny, więc każdy wierzchołek ma stopień parzysty co najmniej 1, a zatem co najmniej 2.
Niech $v_1, v_2, \ldots, v_n$ będzie ciągiem wierzchołków najdłuższej drogi T, o różnych krawędziach (droga prosta), istnienie T gwarantuje skończoność zbioru $E(G)$.
Niech G' to graf powstały przez usunięcie z G krawędzi drogi T.
Gdyby $v_1 \neq v_n$ to stopień v_n w G' byłby nieparzysty, zatem co najmniej jedna krawędź e w grafie G' wychodziłaby z wierzchołka v_n.
Oznacza to, że moglibyśmy wydłużyć drogę prostą T o tę krawędź, co przeczy maksymalności T. Zatem $v_n = v_1$. Oznacza to, że droga prosta T jest zamknęta.

Załóżmy, nie wprost, że droga T nie przechodzi przez wierzchołek v_0. Ze spójności istnieje droga S z v_0 do v_i, gdzie $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Pierwsza krawędź drogi S należy do G', ostatnia krawędź f drogi S dochodzi do wierzchołka v_i. Jeśli dodamy do drogi prostej T krawędź f to otrzymamy dłuższą drogę o różnych krawędziach, co przeczy maksymalności T.

Załóżmy, nie wprost, że droga T nie przechodzi przez krawędź h.
Któryś z wierzchołków drogi T powiedzmy v_i jest końcem krawędzi h.
Ponownie dołączając krawędź h do drogi T otrzymujemy drogę prostą dłuższą niż T, co przeczy wyborowi T.
Zatem droga prosta T przechodzi przez każdą krawędź, jest więc cyklem Eulera.

Twierdzenie Eulera o drodze Eulera

Graf spójny mający dokładnie dwa wierzchołki stopnia nieparzystego ma drogę Eulera.

Wniosek

Z ostatniego twierdzenia wynika, że w grafie półeulerowskim, każda droga Eulera musi mieć początek w jednym wierzchołku nieparzystego stopnia, a koniec w drugim takim wierzchołku.

Algorytm Fleury'ego

Kiedy algorytm zakończy działanie, ciąg ES będzie ciągiem krawędzi drogi lub cyklu Eulera, a VS będzie ciągiem wierzchołków tej drogi lub cyklu.

Krok 1. Wybierz dowolny wierzchołek v nieparzystego stopnia, jeśli taki istnieje. W przeciwnym przypadku wybierz dowolny wierzchołek v. Niech $VS = v$ i niech $ES = \lambda$ (ciąg pusty).

Krok 2. Jeśli z wierzchołka v nie wychodzi już żadna krawędź, zatrzymaj się.

Krok 3. Jeśli pozostała dokładnie jedna krawędź wychodząca z wierzchołka v, powiedzmy krawędź e z wierzchołka v do w, to usuń e z $E(G)$ oraz v z $V(G)$ i przejdź do kroku 5.

Krok 4. Jeśli została więcej niż jedna krawędź wychodząca z wierzchołka v, wybierz taką krawędź, powiedzmy e z v do w, po usunięciu której graf pozostanie spójny; następnie usuń e z $E(G)$.

Krok 5. Dołącz w na końcu ciągu VS, dołącz e na końcu ciągu ES, zastąp v wierzchołkiem w i przejdź do kroku 2.

intuicja

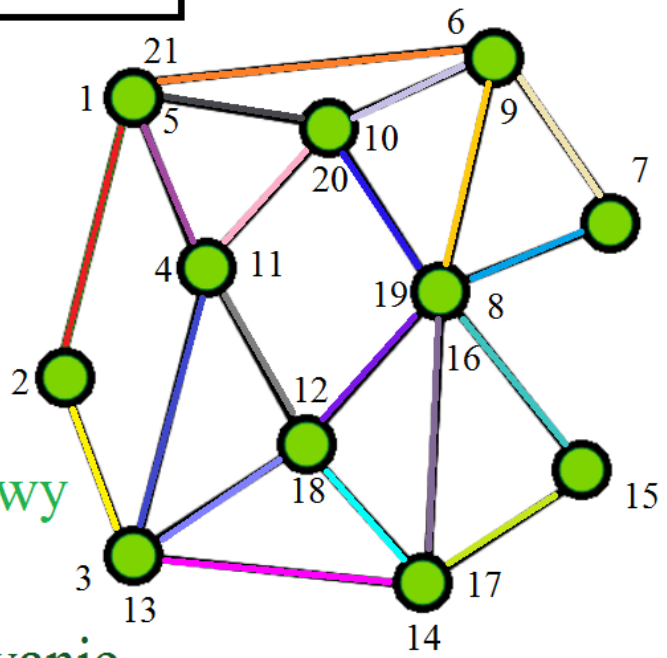
start

koniec

usuwanie

standardowy ruch

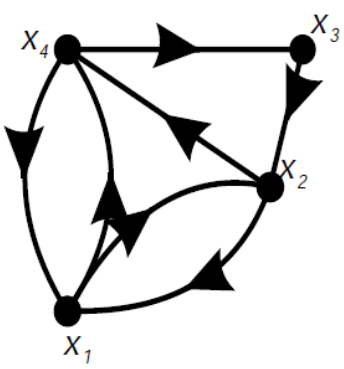
podsumowanie ruchu



Twierdzenie Eulera dla grafów skierowanych

Graf skierowany jest grafem Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego wierzchołka v grafu, stopień wejściowy jest równy stopniowi wyjściowemu.

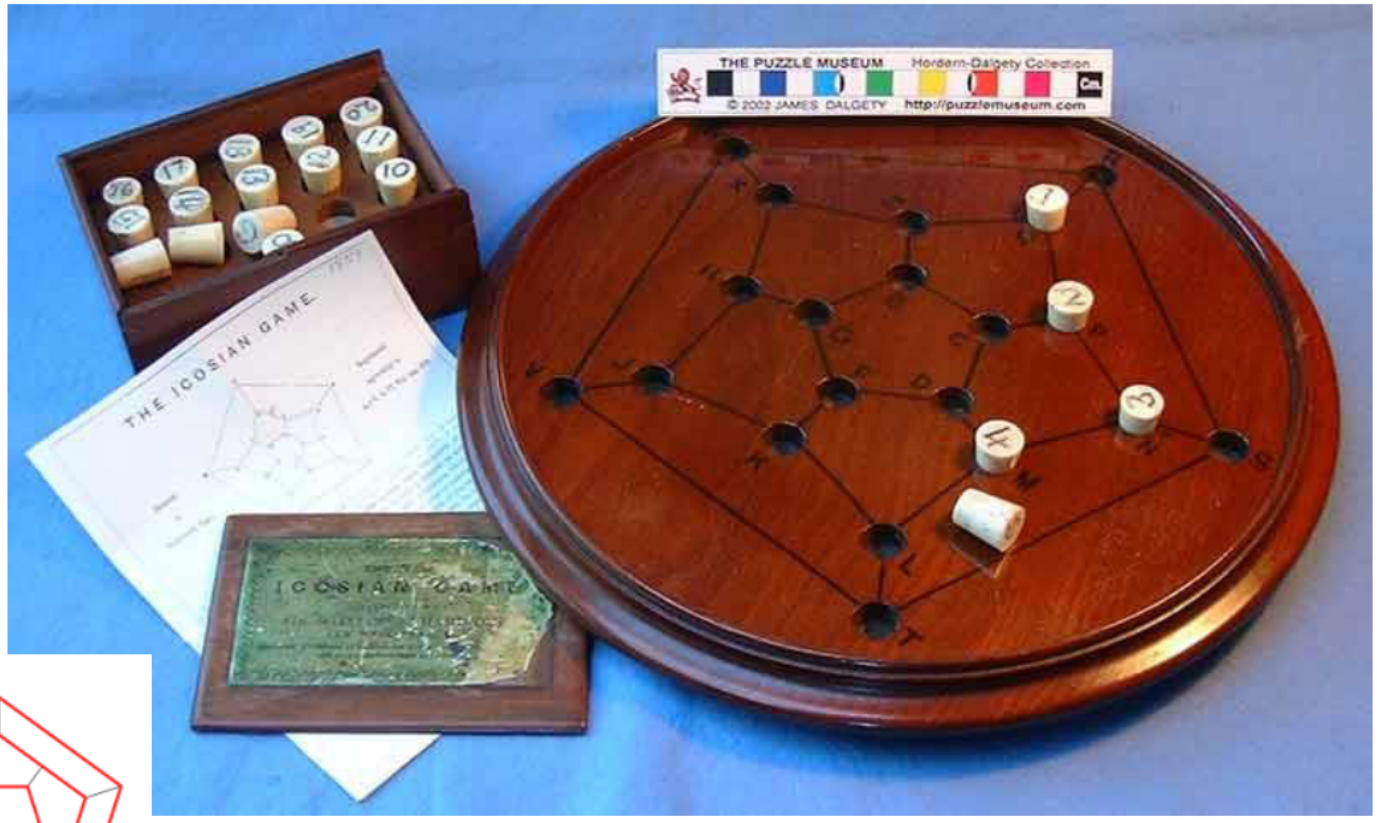
$$indeg(v) = outdeg(v)$$

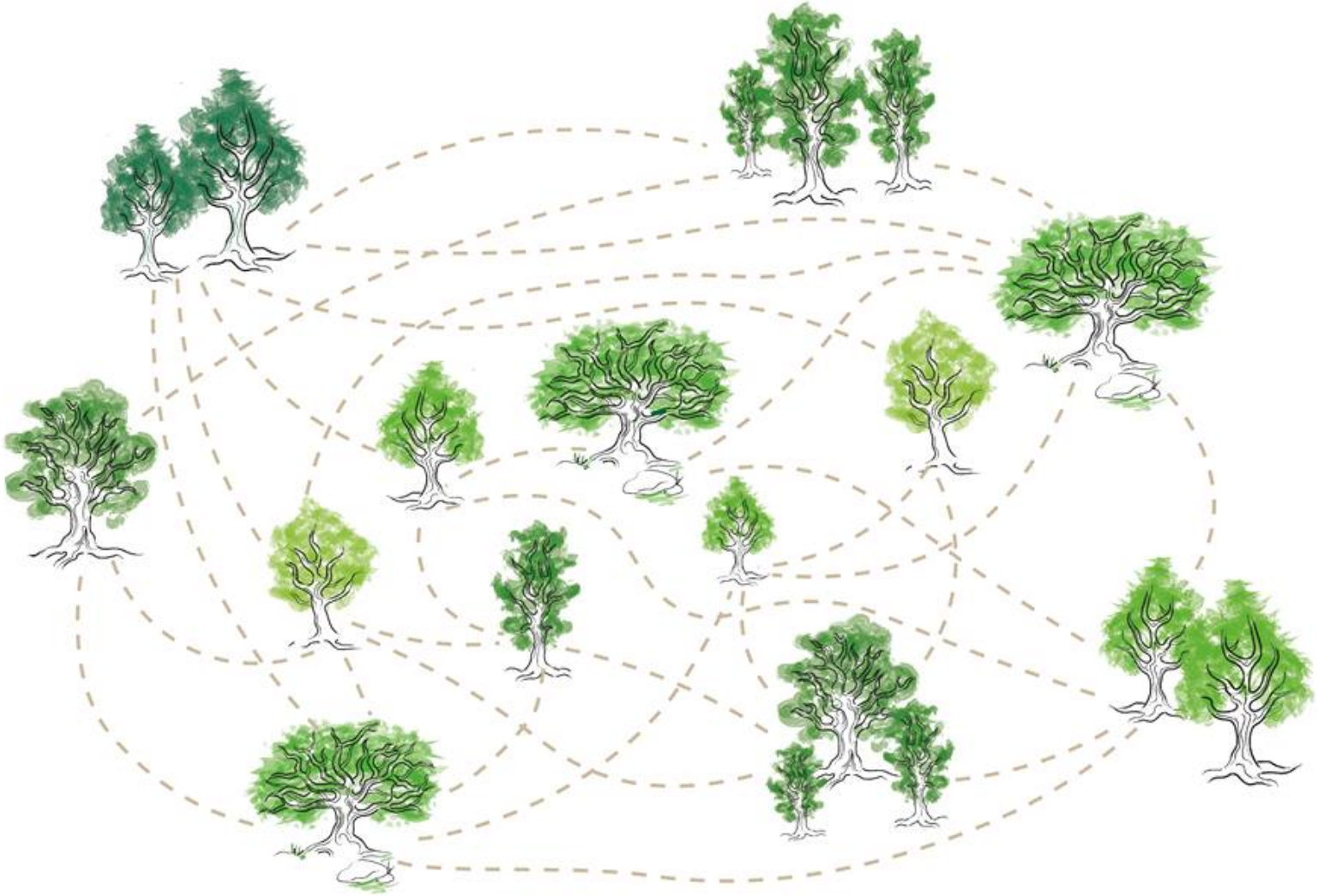


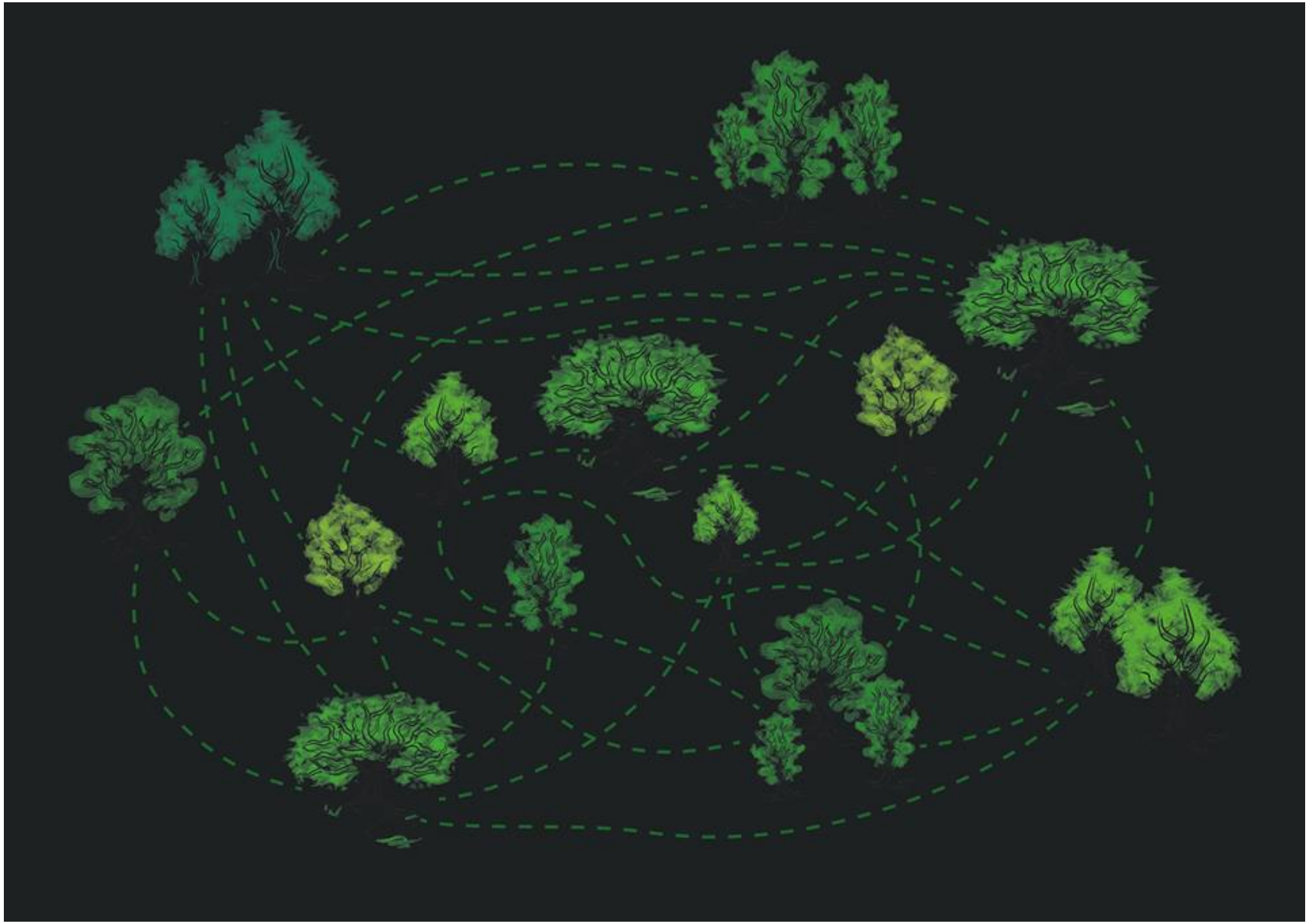
Cykl:

$x_3 x_2 x_4 x_1 x_2 x_1 x_4 x_3$

Propozycja gry
Sir Williama Hamiltona (1857r.)







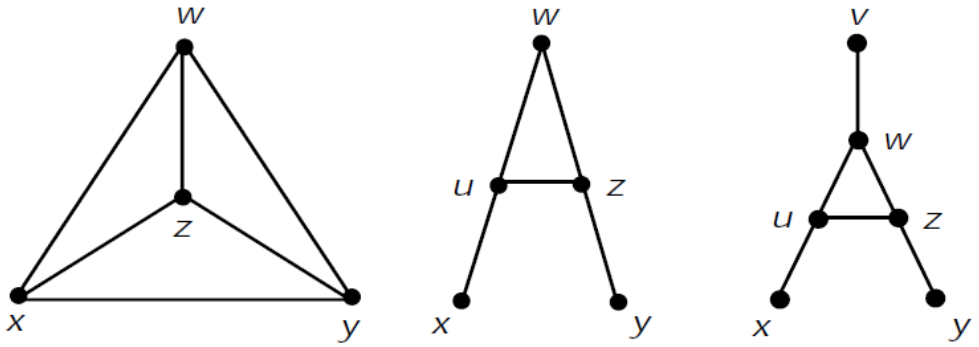
Definicja

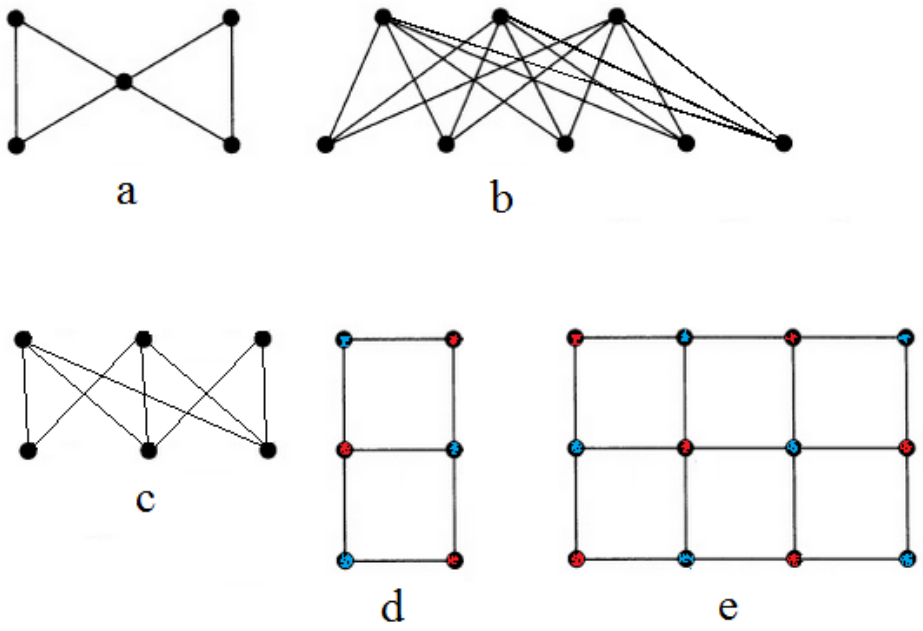
Drogą Hamiltona nazywamy drogę, która przechodzi przez każdy wierzchołek grafu dokładnie jeden raz.

Definicja

Cyklem Hamiltona nazywamy cykl przechodzący przez wszystkie wierzchołki grafu.

Graf posiadający cykl Hamiltona nazywamy **grafem hamiltonowskim**, a graf posiadający tylko drogę Hamiltona - **grafem półhamiltonowskim.**



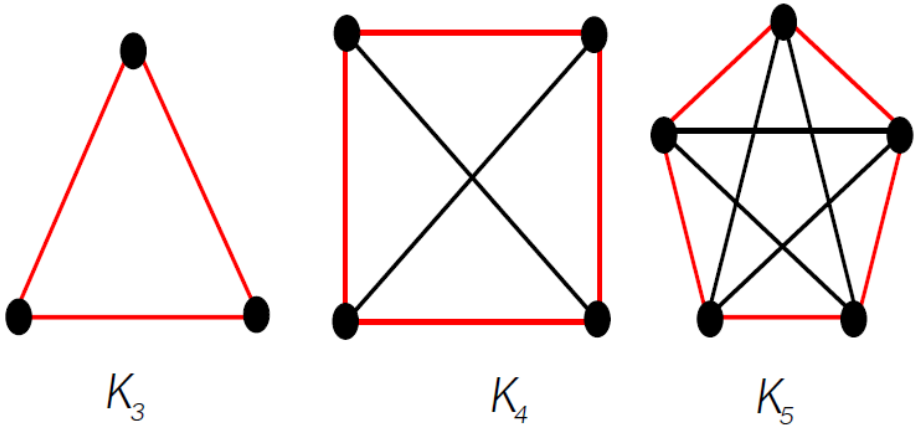

a
b
c
d
e

Twierdzenie

Jeżeli graf o n wierzchołkach jest hamiltonowski, to posiada co najmniej n krawędzi.

Twierdzenie

Każdy graf pełny K_n jest grafem Hamiltona.



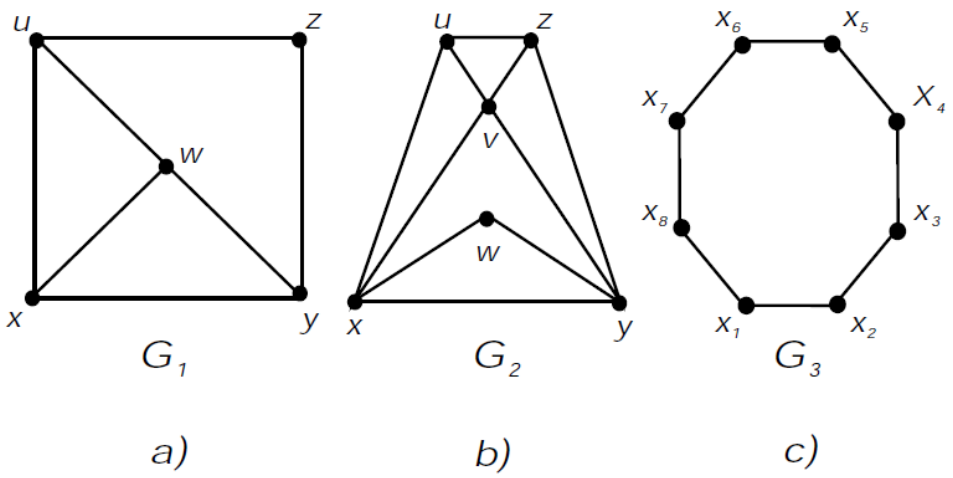
Warunki wystarczające istnienia cyklu Hamiltona

Twierdzenie Ore (1960)

Niech graf $G = \langle V, E \rangle$ będzie grafem spójnym i niech $|V| = n \geq 3$ (tzn. graf G ma co najmniej trzy wierzchołki). Jeżeli

$$deg(u) + deg(w) \geq n$$

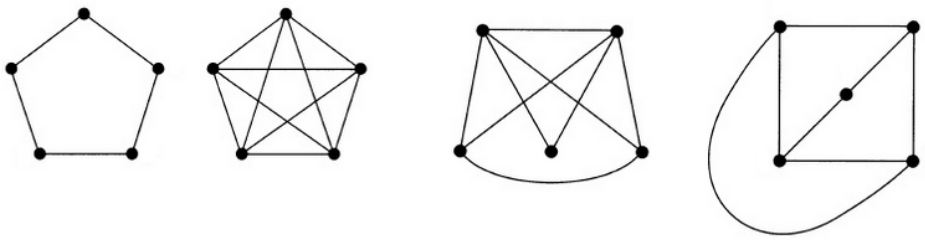
dla każdej pary wierzchołków $u, w \in V$, które nie są połączone krawędzią, to graf G jest grafem hamiltonowskim.



Warunki wystarczające istnienia cyklu Hamiltona

Twierdzenie Dirac (1952)

Jeżeli w grafie prostym i spójnym $G = \langle V, E \rangle$ o n wierzchołkach ($n \geq 3$) oraz stopień każdego wierzchołka $u \in V$ spełnia warunek $deg(u) \geq \frac{1}{2}n$, to graf G jest grafem hamiltonowskim.

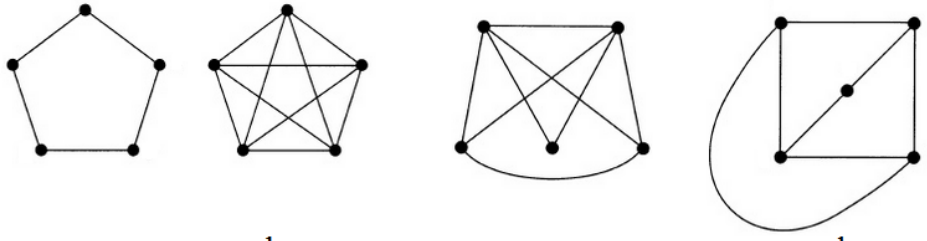


a b c d

Warunki wystarczające istnienia cyklu Hamiltona

Twierdzenie

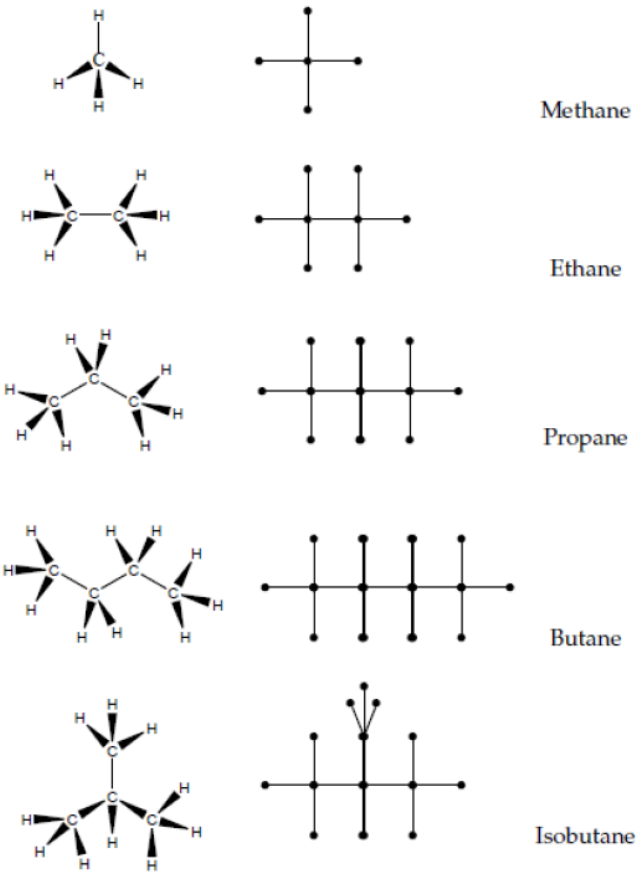
Jeżeli w grafie prostym i spójnym G o n wierzchołkach jest co najmniej $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2$ krawędzi, to graf G jest grafem hamiltonowskim.



a b c d

Drzewa

$$C_nH_{2n+2}$$



Struktura połączeń w tych związkach to drzewo - graf spójny i acykliczny

Twierdzenie 30

Niech e będzie krawędzią grafu spójnego G. Następujące warunki są równoważne:

(a) graf $G \setminus \{e\}$ jest spójny;

(b) e jest krawędzią w pewnym cyklu w grafie G;

(c) e jest krawędzią w pewnej zamkniętej drodze prostej w grafie G.

Twierdzenie 31

Każdy skończony graf spójny ma drzewo spinające.

Twierdzenie 32

Niech G będzie grafem bez pętli i krawędzi wielokrotnych, mającym więcej niż jeden wierzchołek. Następujące warunki są równoważne:

(a) G jest drzewem;

(b) każde dwa różne wierzchołki są połączone dokładnie jedną drogą prostą;

(c) graf G jest spójny, ale przestaje być spójny po usunięciu dowolnej krawędzi;

(d) graf G jest acykliczny, ale przestaje być acykliczny po dodaniu jakiejkolwiek krawędzi.

Twierdzenie 33

Drzewo skończone, mające co najmniej jedną krawędź, ma co najmniej dwa liście.

Twierdzenie 34

Niech G będzie grafem skończonym mającym n wierzchołków i nie mającym pętli i krawędzi wielokrotnych. Wtedy następujące warunki są równoważne:

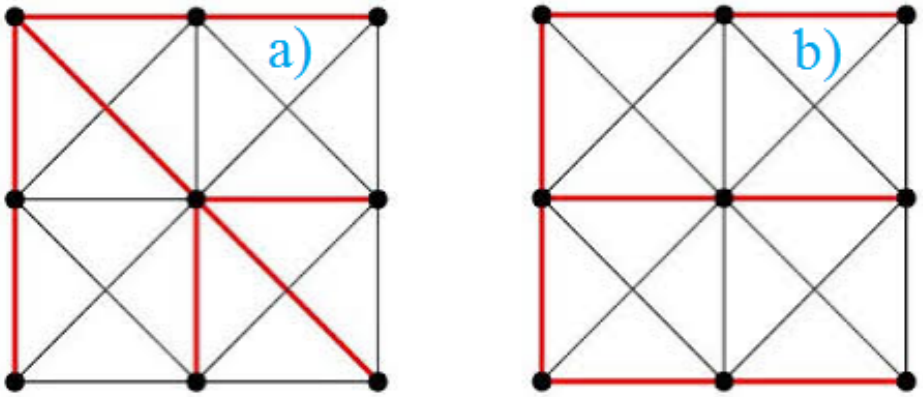
(a) G jest drzewem.
(b) G jest grafem acyklicznym mającym $n-1$ krawędzi.
(c) G jest grafem spójnym mającym $n-1$ krawędzi.

Innymi słowy, każde dwie spośród własności: „spójność", „acykliczność" i „posiadanie $n-1$ krawędzi" implikują trzecią.

Algorytm Drzewo

Algorytm DRZEWO(v)

{Dane: wierzchołek v w skończonym grafie G}
{Wyniki: zbiór krawędzi E drzewa spinającego składowej grafu G zawierającej v}
{Zmienna pomocnicza: ciąg V odwiedzanych wierzchołków, ostatecznie $V = V(G)$}
Niech $V: = \{v\}$ oraz $E: = \emptyset$.
Dopóki istnieją krawędzie w grafie G łączące wierzchołki ze zbioru V z wierzchołkami, które nie należą do V, wykonuj
wybierz taką krawędź $\{u, w\}$ łączącą wierzchołek $u \in V$ z wierzchołkiem $w \notin V$,
dołącz wierzchołek w do V i krawędź $\{u, w\}$ do E.



Algorytm Las

Algorytm LAS

{Dane: skończony graf G}
{Wyniki: zbiór EE krawędzi lasu spinającego dla grafu G}
Niech $VV: = \emptyset$ oraz $EE: = \emptyset$.
Dopóki $VV \neq V(G)$, wykonuj
  wybierz $v \in V(G) \backslash VV$

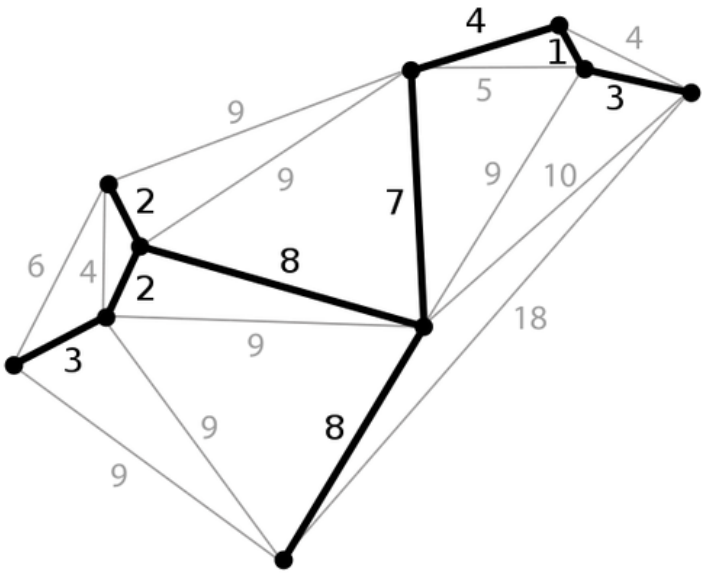
Minimalne drzewo spinające

Definicja 35

Drzewo spinające grafu jest drzewem, które zawiera wszystkie wierzchołki grafu oraz niektóre z jego krawędzi.

Definicja 36

Minimalne drzewo spinające jest drzewem spinającym, którego suma wag krawędzi jest najmniejszą ze wszystkich pozostałych drzew spinających danego grafu.
W grafie może istnieć kilka minimalnych drzew spinających.

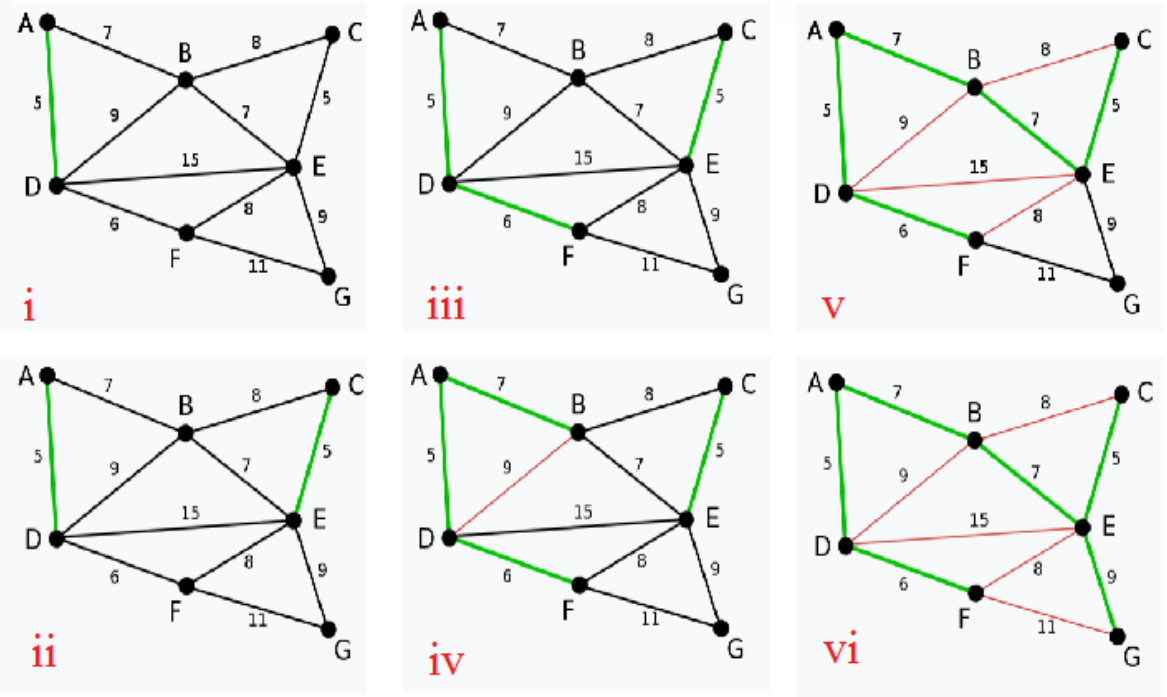


Algorytm Kruskala

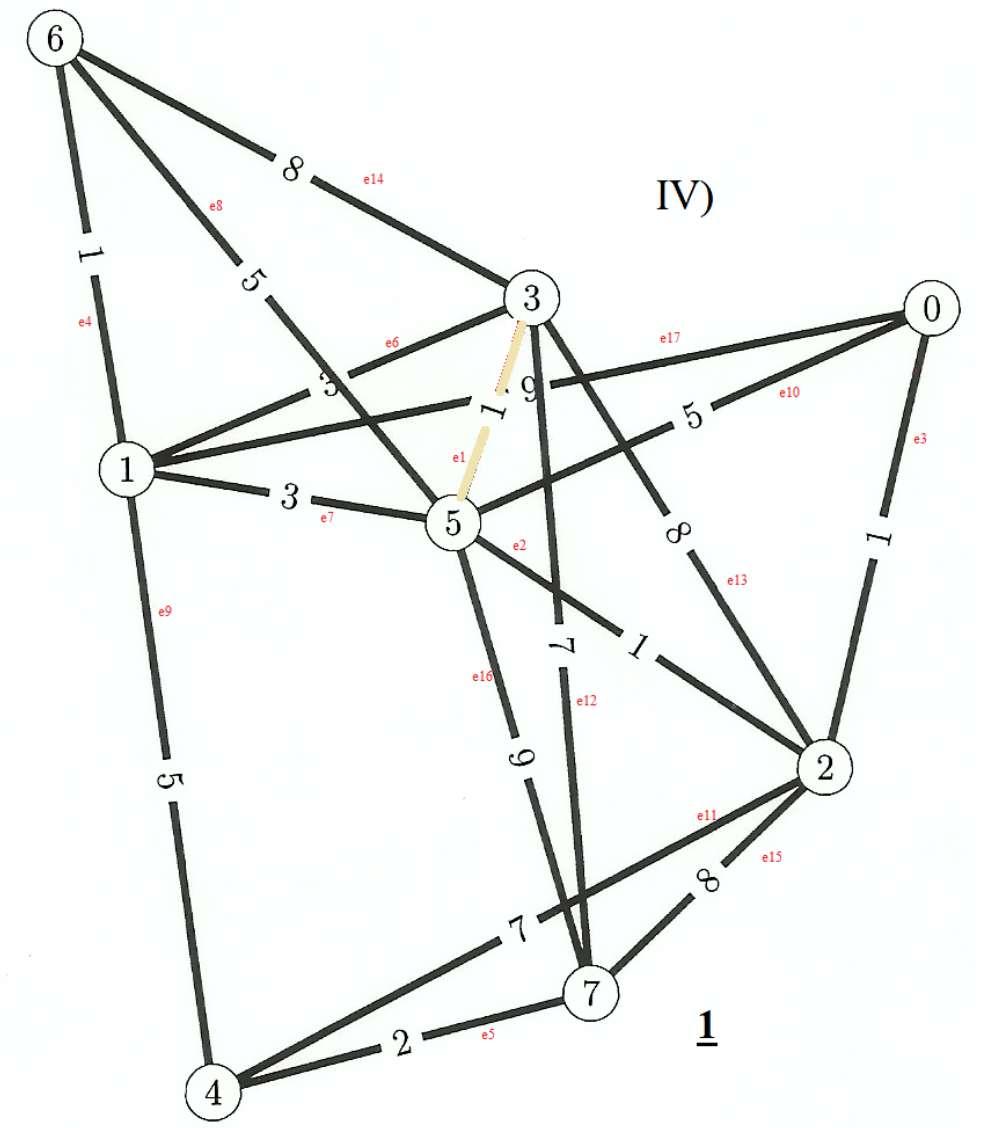
Algorytm Kruskala

{Dane: skończony graf spójny G z wagami, którego krawędzie są uporządkowane według wzrastających wag}
{Wyniki: zbiór E krawędzi minimalnego drzewa spinającego grafu G}
Niech $E: = \emptyset$.
Dla $j = 1$ do $|E(G)|$
  jeśli graf $E \cup \{e_j\}$ jest acykliczny, to dołącz e_j do E.

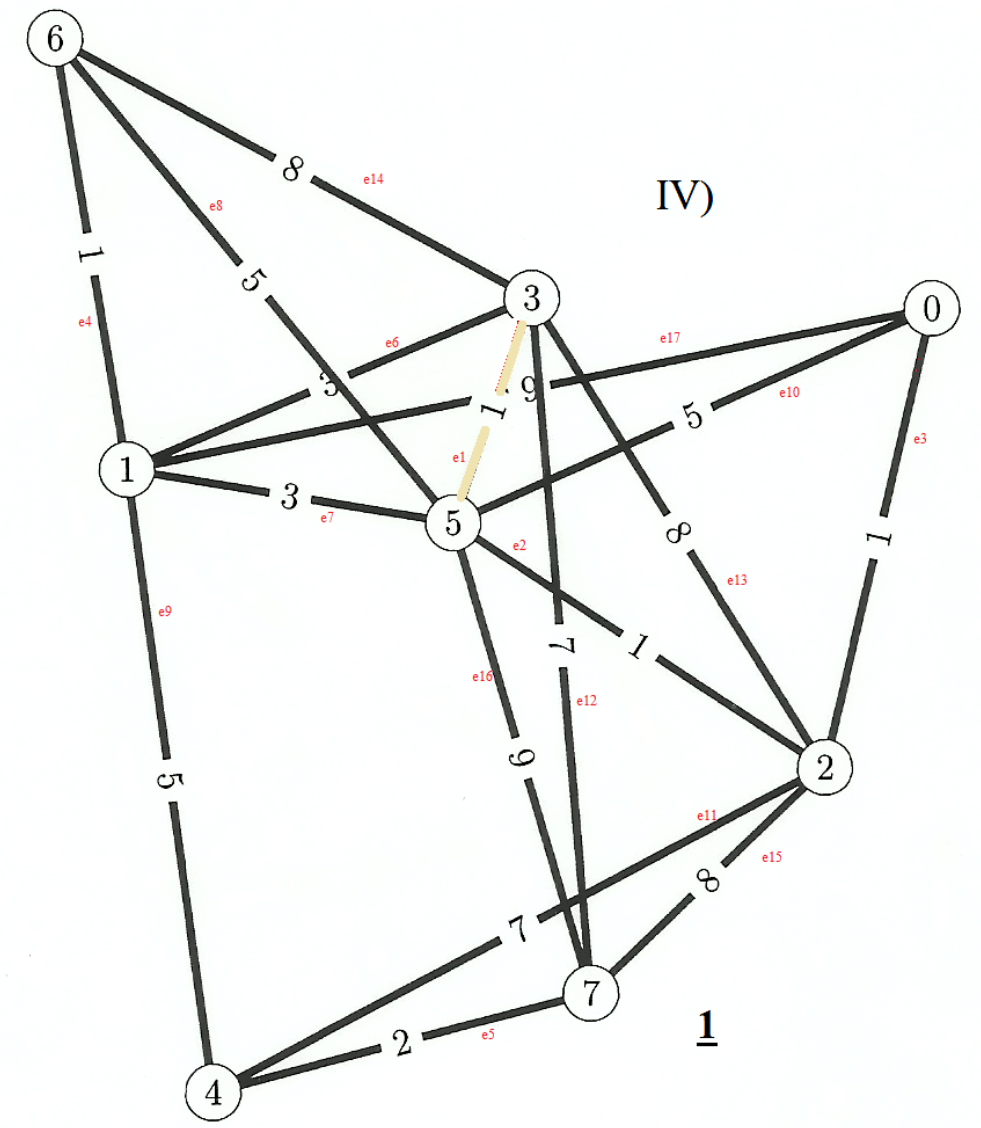
Algorytm Kruskala daje w wyniku minimalne drzewo spinające.



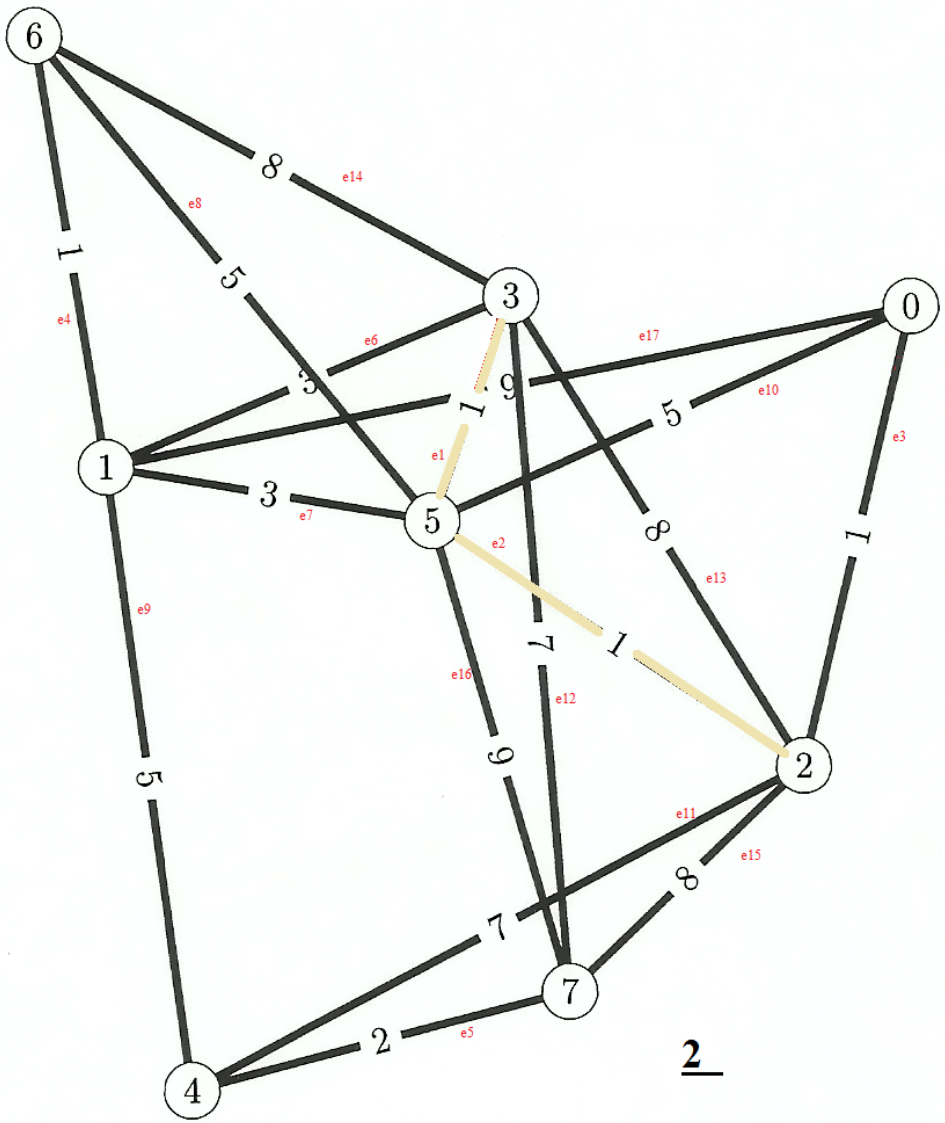
Algorytm Kruskala



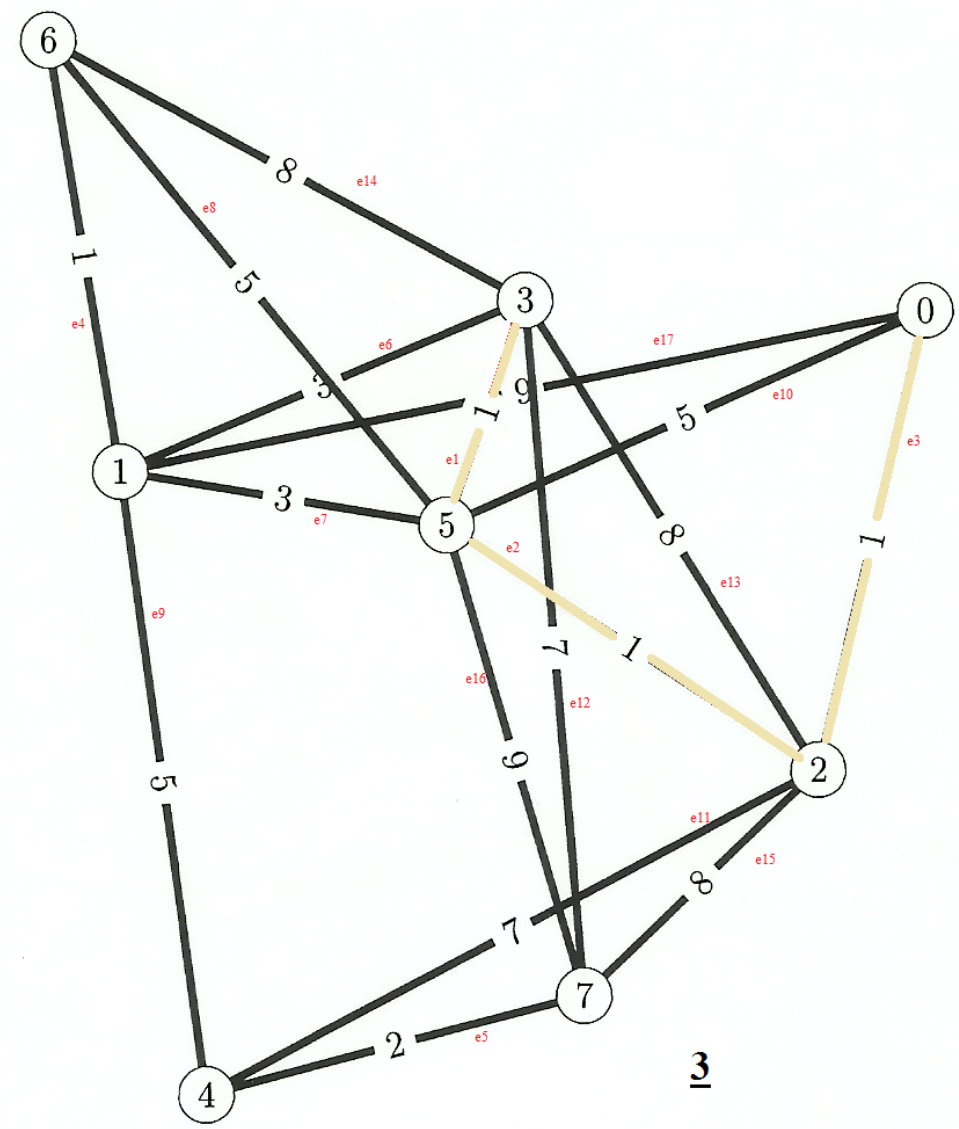
Algorytm Kruskala



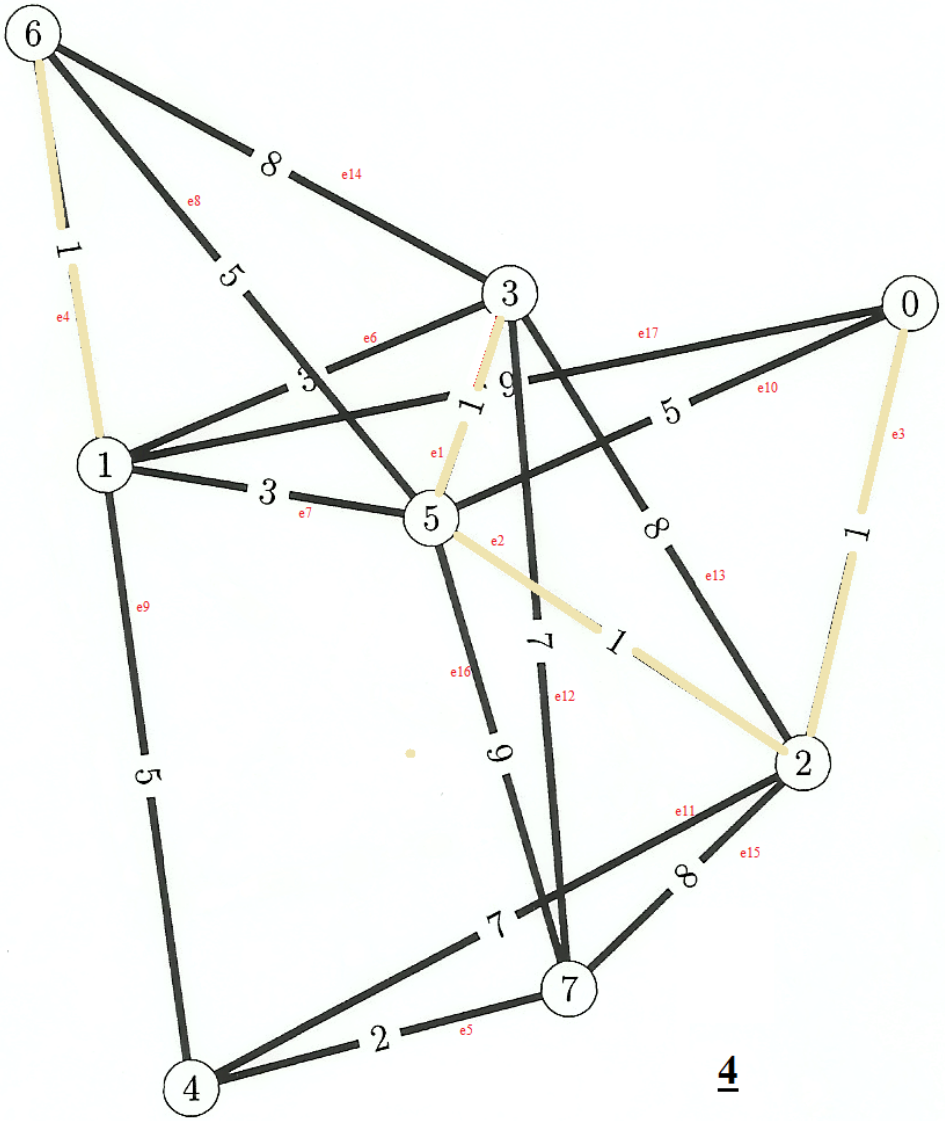
Algorytm Kruskala



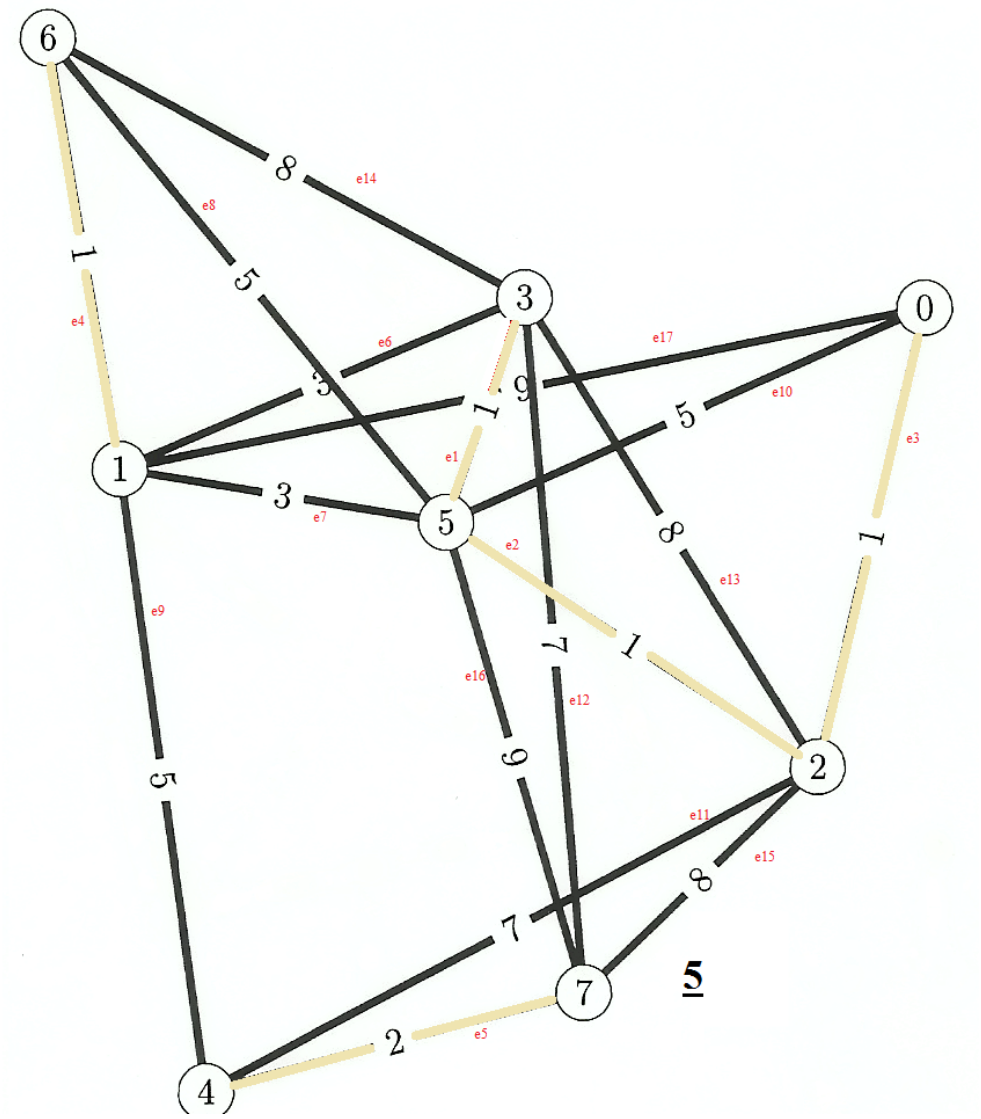
Algorytm Kruskala



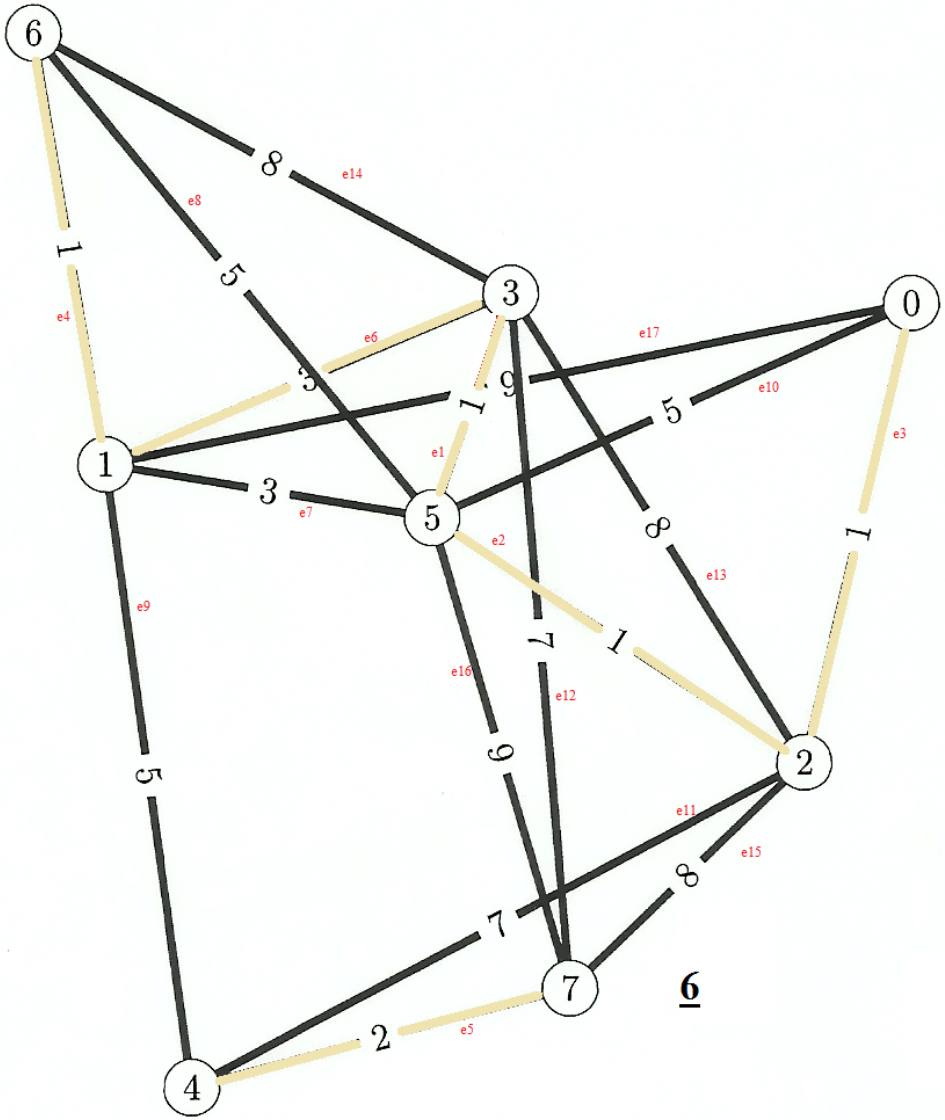
Algorytm Kruskala



Algorytm Kruskala



Algorytm Kruskala



Algorytm Kruskala

i tak dalej od $j = 1$ do $j = |E(G)|$, na końcu powstaje minimalne drzewo spinające

Algorytm Prima

Algorytm Prima

{Dane: skończony graf spójny G z wagami (z krawędziami wypisanymi w jakimkolwiek porządku)}

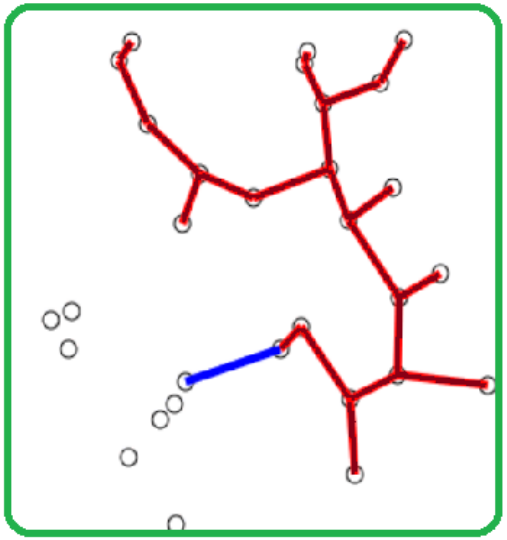
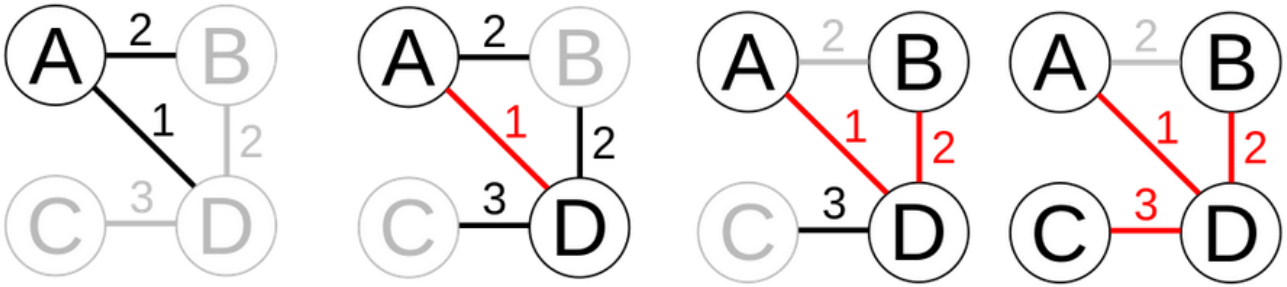
{Wyniki: zbiór krawędzi E minimalnego drzewa spinającego grafu G}

Niech $E: = \emptyset$.

Wybierz w ze zbioru $V(G)$ i niech $V: = \{w\}$.

Dopóki $V \neq V(G)$, wykonuj

wybierz w zbiorze $E(G)$ krawędź $\{u, v\}$ o najmniejszej możliwej wadze, taką że $u \in V$ i $v \in V(G) \backslash V$

dołącz krawędź $\{u, v\}$ do zbioru E i wierzchołek v do zbioru V.

Algorytm Prima daje w wyniku minimalne drzewo spinające grafu spójnego z wagami.