PERMUTACJE

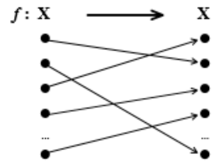
Silnia. Silnią liczby naturalnej n nazywamy iloczyn wszystkich dodatnich liczb naturalnych nie większych niż n.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n. \quad 0! = 1$$

Permutacją zbioru n-elementowego nazywamy każdy n-wyrazowy ciąg utworzony ze wszystkich elementów tego zbioru. **I**
Liczba permutacji zbioru złożonego z n elementów jest równa $n!$.

Dowód: na 1-szym miejscu możemy ustawić n elementów, na drugim n-1 elementów, wreszcie na n-tym 1 element. Zatem liczba ustawień wynosi $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$. Fakt ten zapisujemy: $P_n = n!$
Przykład: Z trzech danych elementów: a, b, c, można utworzyć następujące permutacje: $(a,b,c), (a,c,b), (b,a,c), (b,c,a), (c,a,b), (c,b,a)$. Liczba ich wynosi $3! = 6$.

Permutacją zbioru n-elementowego X nazywamy dowolną wzajemnie jednoznaczną funkcję f: $X \to X$



II

Przykład:
$X = \{ a, b, c, d \}$ $\qquad f(a) = d,\ f(b) = a,\ f(c) = c,\ f(d) = b$

Definicja

- $\Omega_n = \{1, 2, \ldots, n\}$
- Wzajemnie-jednoznaczne odwzorowanie $\pi : \Omega_n \to \Omega_n$ nazywa się *permutacją*.
- Oznaczenie: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \ldots & \pi(n) \end{pmatrix}$
- Mnożenie permutacji: $\tau\sigma = \tau \circ \sigma$
  - przykład: $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
  - $\tau\sigma \neq \sigma\tau$

Grupa permutacji

- $(\tau\sigma)\omega = \tau(\sigma\omega)$
- permutacja jednostkowa $e = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ 1 & \ldots & n \end{pmatrix}$
- permutacja odwrotna $\tau\tau^{-1} = e$
- grupa permutacji: S_n

III

---

1 LISTA ZADAŃ: PERMUTACJE

Zadanie 1 Na ile sposobów drużyna piłkarska (11 graczy) może wyjść z szatni pojedynczo na boisko.

Zadanie 2 Na ile wszystkich różnych sposobów można ustawić w szeregu 4 chłopców i 3 dziewczynki tak, aby:

1. najpierw stały dziewczynki, a następnie chłopcy,
2. pierwszy stał chłopiec,
3. pierwszy i ostatni stał chłopiec,
4. żadnych dwóch chłopców nie stało obok siebie.

Zadanie 3 Na ile wszystkich różnych sposobów można ustawić w szeregu siedem kobiet i siedmiu mężczyzn tak, aby żadne dwie osoby tej samej płci nie stały obok siebie ?

Zadanie 4 Ile wszystkich różnych liczb pięciocyfrowych

1. dowolnych
2. podzielnych przez 5
3. parzystych
4. podzielnych przez 4 .

Zadanie 5 Na ile różnych sposobów można posadzić przy okrągłym stole n osób?
Jeśli każde dwa sposoby rozsadzenia uważamy za jednakowe wtedy i tylko wtedy,

a) gdy każda osoba ma tego samego sąsiada z prawej strony i tego samego z lewej strony,
b) gdy każda osoba ma jednakowych sąsiadów (nie ważne czy z prawej czy z lewej strony).

Zadanie 6

Niech $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ oraz $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Wyznacz permutacje:

$\sigma \cdot \tau, \qquad \tau \cdot \sigma, \qquad \sigma \cdot \sigma, \qquad \tau \cdot \tau, \qquad \tau^{-1}, \qquad \sigma^{-1}.$