Wariacje bez powtórzeń

Wariacją k-elementową bez powtórzeń utworzoną ze zbioru n-elementowego ($k \leq n$) nazywamy każdy k-wyrazowy ciąg różnych elementów z tego zbioru. Z k-wyrazowymi wariacjami bez powtórzeń zbioru złożonego z n elementów mamy do czynienia, gdy k razy wybieramy bez zwracania po jednym elemencie z danego zbioru, przy czym ma znaczenie kolejność wyboru elementów. Oczywiście n-wyrazowe wariacje bez powtórzeń zbioru n-elementowego to po prostu permutacje tego zbioru.
Liczba k-wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru n-elementowego wyraża się wzorem:

$$\boldsymbol{V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Przykład: Z trzech danych elementów: a, b, c, można utworzyć sześć następujących dwuelementowych wariacji bez powtórzeń: $(a,b),(a,c),(b,a),(b,c),(c,a),(c,b)$.

Wariacje z powtórzeniami

Wariacją k-wyrazową z powtórzeniami zbioru n-elementowego nazywa się każdy k-wyrazowy ciąg elementów tego zbioru (dowolny element może wystąpić wielokrotnie w ciągu). Z k-wyrazowymi wariacjami z powtórzeniami zbioru złożonego z n elementów mamy do czynienia, gdy k razy wybieramy ze zwracaniem po jednym elemencie z danego zbioru, przy czym ma znaczenie kolejność wyboru elementów.
Liczba wszystkich k-wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru n-elementowego wyraża się wzorem:

$$\boldsymbol{W_n^k = n^k}$$

Przykład: Z trzech danych elementów: a, b, c, można utworzyć osiem następujących 2-wyrazowych wariacji z powtórzeniami: $(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a),(a,c),(c,a),(b,c),(c,b)$.

Istnieją jeszcze **permutacje z powtórzeniami** (n elementów przy czym niektóre się powtarzają).
Niech będzie k elementów, które powtarzają się odpowiednio $n_1, n_2, \ldots, n_k$ razy. Liczba permutacji z powtórzeniami wyraża się wzorem:

$$\boldsymbol{P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2!, \ldots \cdot n_k!}}$$

Uogólnienie wzoru dwumianowego:

$$(x_1 + \cdots + x_k)^n = \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_k \geqslant 0 \\ n_1+\cdots+n_k = n}} \binom{n}{n_1,\ldots,n_k} x_1^{n_1} \cdot \cdots \cdot x_k^{n_k}$$

$$\frac{n!}{n_1! \ldots n_k!} \overset{ozn}{=} \binom{n}{n_1,\ldots,n_k}$$

Kombinacje z powtórzeniami (k-elementowe podzbiory zbioru n-elementowego z możliwością powtarzania się elementów), Wówczas liczba kombinacji z powtórzeniami wyraża się wzorem:

$$\boldsymbol{\overline{C}_n^k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}}$$

Na przykład liczba 2-elementowych kombinacji z powtórzeniami zbioru 4-elementowego A = {a, b, c, d} wynosi $\frac{(4+2-1)!}{2!(4-1)!} = 10$.
Mamy tu 10 elementów: $(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,a),(b,c),(c,b),(c,d),(d,c)$.

Zadanie 1 Obliczyć liczbę różnych flag utworzonych przez trzy poziome różnokolorowe pasy, których kolory można wybrać spośród 6-ciu kolorów.

Zadanie 2 Obliczyć, ile jest liczb pięciocyfrowych o wszyskich cyfrach różnych.

Zadanie 3 Obliczyć liczbę sposobów rozdzielenia trzech medali (złotego, srebrnego i brązowego) pomiędzy sześciu zawodników.

Zadanie 4 Ile jest wszystkich liczb czterocyfrowych ? Ile jest liczb czterocyfrowych o wszystkich cyfrach różnych?

Zadanie 5 Na ile sposobów można rozmieścić 9 kul ponumerowanych od 1 do 9, w trzech komórkach ponumerowanych od I do III?

Zadanie 6 Na ile sposobów można rozmieścić 9 kul ponumerowanych od 1 do 9, w trzech komórkach ponumerowanych od I do III tak, aby

1. w komórce o numerze I była kula o numerze 1 (mogą w tej komórce być jeszcze inne kule),
2. w komórce o numerze I była dokładnie jedna kula,
3. w komórce o numerze I była co najmniej jedna kula,
4. w komórce o numerze I była co najwyżej jedna kula.

Odpowiedź: *a)* 3^8, *b)* $9 \cdot 2^8$, *c)* $3^9 - 2^9$, *d)* $9 \cdot 2^8 + 2^9$.

Zadanie 7 Na ile sposobów można rozmieścić 7 kul ponumerowanych od 1 do 7, w pięciu komórkach ponumerowanych od I do V?

Zadanie 8 Na ile sposobów można rozmieścić 7 kul ponumerowanych od 1 do 7, w pięciu komórkach ponumerowanych od I do V tak, aby

1. dokładnie jedna komórka była zajęta,
2. dokładnie dwie komórki były zajęte,
3. dokładnie trzy komórki były zajęte?

Odpowiedź: *a)* 5, *b)* $\binom{5}{2}\left(2^7 - 2\right)$, *c)* $\binom{5}{3}\left(3^7 - 3 \cdot 2^7 + 3\right)$

Zadanie 9 Ile wszystkich różnych wyników można otrzymać, gdy rzucamy 2 razy kostką i trzy razy monetą?

Zadanie 10 Na ile sposobów k bozonów może obsadzić pasmo złożone z n stanów energetycznych?

Na $\binom{k+n-1}{k}$ sposobów - każdemu bozonowi przypisujemy stan energetyczny, przy czym kilku bozonom można przypisać ten sam stan. Ponieważ bozony są nierozróżnialne, kolejność w otrzymanym ciągu nie gra roli. Każde przypisanie jest zatem k-elementową kombinacją z powtórzeniami ze zbioru n-elementowego