Kolorowanie grafu

25 maja 2017

Kolorowanie grafu $\mathbf{G} = (V, E)$ to funkcja $c : V \longrightarrow \mathbb{N}$ taka, że $c(v) \neq c(w)$ ilekroć vw jest krawędzią grafu $\mathbf{G}$.

Niech G będzie grafem bez pętli.

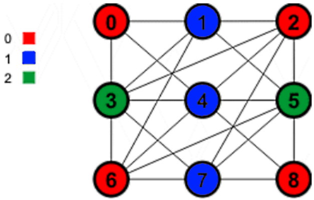
istnienie krawędzi równoległych w grafie G nie ma znaczenia przy kolorowaniu jego wierzchołków

zagadnienie kolorowania grafów rozważamy tylko dla grafów spójnych

Mówimy, że G jest grafem $k-$**kolorowalnym**, jeśli każdemu wierzchołkowi możemy przypisać jeden z k kolorów, w taki sposób, by wierzchołki przyległe (sąsiednie) miały różne kolory. Jeśli graf G jest $k-$**kolorowalny**, ale nie jest $(k-1)-$**kolorowalnym**, to mówimy, że jest on $k-$**chromatyczny**. Najmniejszą liczbę k różnych kolorów potrzebnych do pokolorowania wierzchołków grafu G nazywamy **liczbą chromatyczną** tego grafui oznaczamy $\chi(G)$.

Kolorowanie grafu $\mathbf{G}$ na k kolorów wyznacza rozbicie zbioru V na sumę rozłączną $V = V_0 \cup V_1 \cup \ldots \cup V_{k-1}$ jednobarwnych zbiorów V_i, przy czym każdy graf indukowany postaci $\mathbf{G}|_{V_i}$ jest antykliką. Na odwrót, rozbicie $V = V_0 \cup V_1 \cup \ldots \cup V_{k-1}$ pozwala na pokolorowanie grafu $\mathbf{G}$ na k kolorów.

Graf k-kolorowalny (k-barwny) to graf dający się pokolorować k barwami.

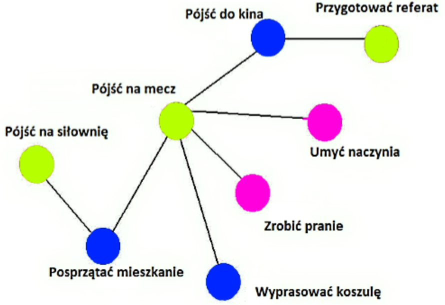


Liczba chromatyczna grafu, $\chi(\mathbf{G})$, to najmniejsza liczba barw, którymi można pokolorować graf $\mathbf{G}$.

Scheduling – mamy do wykonania wiele prac. Niektóre z nich nie mogą być wykonywane w tym samym czasie

(np. w ciągu jednego dnia).

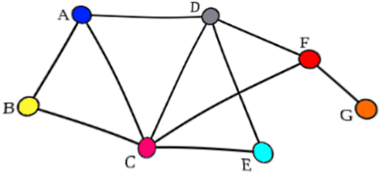
Liczba chromatyczna określa ile potrzeba dni na wykonanie wszystkich prac.



Prace wykonywane w odpowiednim czasie.

Każda rzecz do zrobienia musi być wykonana w konkretnym przedziale czasowym (np. transmisja z meczu).

Tworzymy graf – wierzchołkom odpowiadają mecze, a krawędź jest wtedy, gdy mecze zahaczają o siebie w czasie.



Optymalne kolorowanie grafu $\mathbf{G}$ to kolorowanie używające dokładnie $\chi(\mathbf{G})$ kolorów.

Twierdzenie 1

Graf, którego wszystkie wierzchołki mają stopień nie większy niż k jest $(k+1)$-kolorowalny.

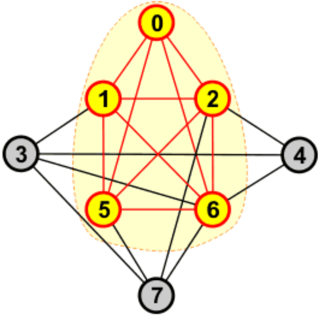
Dowód

Dowód poprowadzimy indukcyjnie ze względu na liczbę wierzchołków w grafie $\mathbf{G} = (V, E)$. Jeśli graf ma jeden wierzchołek, to oczywiście wystarcza jeden kolor. Załóżmy więc, że $|V| \geq 2$. Wybierzmy dowolny wierzchołek $v \in V$ i rozważmy graf $\mathbf{G}|_{V-\{v\}}$. Na mocy założenia indukcyjnego da się go pokolorować $k+1$ barwami. Zauważmy, że v ma co najwyżej k sąsiadów. Wśród $k+1$ kolorów użytych w kolorowaniu grafu $\mathbf{G}|_{V-\{x\}}$ jest więc kolor nie przypisany żadnemu sąsiadowi wierzchołka v. Wybieramy więc ten kolor jako barwę dla v. Udało się pokolorować graf $\mathbf{G}$ zbiorem $k+1$ kolorów, co kończy dowód.

Ograniczenia górnego, na liczbę chromatyczną grafu, podanego w Twierdzeniu nie można w ogólności wzmocnić.

Istotnie, każde kolorowanie kliki $\mathcal{K}_{k+1}$ wymaga dokładnie $k+1$ kolorów, mimo iż stopień każdego wierzchołka to k.

Kliką (ang. clique) w grafie nazwiemy jego podgraf, którego wszystkie wierzchołki są ze sobą nawzajem połączone krawędziami. Innymi słowy, klika jest podgrafem pełnym danego grafu.



Klika maksymalna (ang. maximal clique) jest taką kliką grafu, że nie można do niej już dodać żadnego nowego wierzchołka z grafu.

Klika największa (ang. maximum clique) jest największym podgrafem pełnym. Problem znajdowania największej kliki jest problemem trudnym obliczeniowo.

Kolorowanie krawędzi grafu

Przez *k-kolorowanie krawędzi* ζ grafu G (bez pętli) rozumiemy przyporządkowanie każdej krawędzi grafu G jednego z k kolorów ze zbioru $K = \{1, 2, \ldots, k\}$.

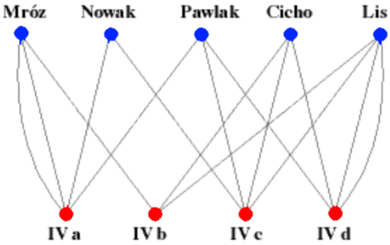
Kolorowanie ζ jest *właściwe* jeżeli żadne dwie przyległe krawędzie nie są tego samego koloru.

k-kolorowanie
krawędzi można inaczej zdefiniować jako podział $(E_1, E_2, \ldots, E_k)$ zbioru krawędzi E, gdzie E_i oznacza (być może pusty) podzbiór zbioru E, którego krawędziom przyporządkowano kolor i. Właściwe k-kolorowanie krawędzi jest wówczas takim k-kolorowaniem, w którym każdy podzbiór E_i składa się z parami nieprzyległych krawędzi.

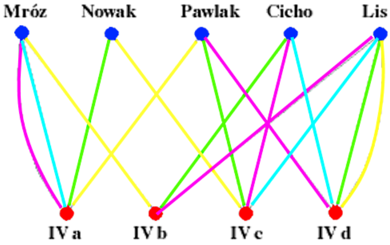
Graf G jest *k-kolorowalny krawędziowo* jeżeli G ma właściwe k-kolorowanie krawędziowe. Oczywiście każdy graf G (bez pętli) jest ε-kolorowalny krawędziowo; jak również, jeżeli G jest k-kolorowalny krawędziowo, to jest też l-kolorowalny krawędziowo dla każdego $l > k$ ($l \leq \varepsilon$). *Indeks chromatyczny* (krawędziowa liczba chromatyczna) $\chi'(G)$ grafu G bez pętli, jest to najmniejsza liczba k dla której graf G jest k-kolorowalny krawędziowo. Graf G jest *k-chromatyczny krawędziowo* jeżeli $\chi'(G) = k$.

Przykładowe zastosowanie.
Rozważmy następujący problem. Dany jest zbiór m nauczycieli oraz zbiór n klas. Podane są także liczby godzin zajęć jakie musi odbyć w ciągu tygodnia dany nauczyciel z każdą z klas. Szukana jest minimalna liczba godzin w tygodniu, w czasie których mogą odbyć się wszystkie zajęcia. Wiadomo, że w danym momencie czasu nauczyciel może uczyć tylko jedną klasę i każda klasa może być uczona przez tylko jednego nauczyciela.

Jak rozwiązać problem układania planu zajęć przy pomocy grafów? Stwórzmy graf dwudzielny, którego zbiór wierzchołków można podzielić na dwa rozłączne zbiory odpowiadające nauczycielom oraz klasom. W grafie tym dopuszczamy istnienie wielu krawędzi między każdą parą wierzchołków. Wierzchołek odpowiadający nauczycielowi łączymy tyloma krawędziami z wierzchołkiem odpowiadającym klasie ile godzin zajęć musi on odbyć z tą klasą w ciągu tygodnia. Zauważmy, że jeśli pokolorujemy krawędzie tego grafu tak, aby każde dwie mające wspólny koniec były różnych kolorów, to krawędzie pokolorowane tym samym kolorem odpowiadają zajęciom, które mogą odbywać się równocześnie. Poszukujemy więc minimalnej liczby kolorów potrzebnych do pokolorowania w ten spób wszystkich krawędzi. Innymi słowy, poszukiwany jest indeks chromatyczny tego grafu. Problem ten można oczywiście skomplikować dodając założenia dotyczące sal, w których zajęcia mogą się odbywać, bądź narzucając pewne terminy, w których dane zajęcia muszą sie odbyć.



Dla przykładu: profesor Mróz ma 2 godziny z IVa i 1 godzinę z IVb a profesor Nowak po 1 godzinie z IVa i IVc. Indeks chromatyczny tego grafu wynosi 4. Czyli w ciągu 4 godzin uda się przeprowadzić wszystkie zajęcia. Widać, że mniejsza liczba godzin nie wystarczy ponieważ profesor Lis musi przeprowadzić 4 godziny zajęć. Również klasy IVa, IVc oraz IVd mają zaplanowane po 4 godziny.



Mróz	IVa	IVb	IVa	
Nowak		IVc		IVa
Pawlak	IVd	IVa		IVc
Cicho	IVc		IVd	IVb
Lis	IVb	IVd	IVc	IVd

Dla grafu pełnego K_n mamy $\chi(K_n) = n$.

Jeżeli graf jest grafem cyklicznym C_n, to

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{dla } n \text{ parzystego} \\ 3 & \text{dla } n \text{ nieparzystego,} \end{cases}$$

co możemy zapisać inaczej $\chi(C_{2i+1}) = 3$, $\chi(C_{2i}) = 2$ dla $i \in \{1, 2, ...\}$.

$\chi(G) = 1$ jeżeli G jest grafem pustym (składającym się jednego wierzchołka).

$\chi(G) = 2$, gdy G jest grafem dwudzielnym, w szczególności każde drzewo jest 2-chromatyczne.

Zachłanny algorytm kolorowania wierzchołków grafu

Dane: graf prosty G, o n wierzchołkach, którego wierzchołki są ponumerowane $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, kolory numerujemy od 1 do n
Wynik: pokolorowany graf G

ZAKG(G)

przypisz kolor 1 do wierzchołka v_1
for $k \leftarrow 2$ **to** n **do**
dla wierzchołka v_k użyj pierwszego dostępnego koloru, który nie był wykorzystany do pokolorowania wierzchołka sąsiedniego

Z definicji liczby $\chi(G)$ wynika, że jeżeli graf G ma n wierzchołków, to jego liczba chromatyczna jest nie większa od n tzn.

$$|V| = n \Rightarrow \chi(G) \leq n$$

W dowolnym grafie

$$\chi(G) \geq \omega$$

gdzie ω jest rozmiarem (ilością wierzchołków) największej kliki.

Kliką grafu G nazywamy jego podgraf pełny.

Twierdzenie Brooksa

Jeżeli graf $G = \langle V, E \rangle$ jest grafem prostym, w którym stopień grafu jest równy $\Delta(G)$, to

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Równość w relacji (1) zachodzi tylko w dwu przypadkach:

- gdy graf G jest grafem pełnym K_n $(n \geq 3)$. Wiemy, że $\Delta(K_n) = n - 1$ i $\chi(K_n) = n$ stąd

$$\Delta(K_n) + 1 = n - 1 + 1 = n = \chi(K_n)$$

- gdy graf G jest grafem cyklicznym o nieparzystej liczbie wierzchołków tzn. $G = C_{2i+1}$, $(i = 1, 2, \ldots)$. Mamy $\Delta(C_{2i+1}) = 2$, $\chi(C_{2i+1}) = 3$, stąd

$$\Delta(C_{2i+1}) + 1 = 2 + 1 = 3 = \chi(C_{2i+1})$$

Podzbiór wierzchołków $S \subset V$ grafu $g = (V, E)$, nazywamy **niezależnym**, jeżeli żadne dwa wierzchołki tego podzbioru, nie są sąsiednie. W szczególności każdy podzbiór jednoelementowy zbioru V oraz zbiór pusty wierzchołków jest zbiorem niezależnym grafu G.

Liczbę

$$\alpha(G) = \max_i |S_i|$$

gdzie S_i są wszystkimi niezależnymi zbiorami grafu G, nazywamy **liczbą niezależności** grafu G. Zbiór S^*, dla którego osiągnięte jest maksimum, nazywamy **maksymalnym zbiorem niezależnym**.

Liczbę chromatyczną grafu można oszacować następująco

$$\chi(G) \geq \lceil \frac{n}{\alpha(G)} \rceil$$

Mówimy, że graf G jest krawędziowo $k-$**kolorowalny** jeśli jego krawędzie można pokolorować **k** kolorami w taki sposób, że przyległe krawędzie mają różne kolory. Jeżeli graf G jest **krawędziowo** $k-$**kolorowalny** i nie jest **krawędziowo** $(k-1)-$**kolorowalny**, to mówimy, że jego **indeks chromatyczny** $\bar{\chi}(G)$ wynosi **k**.

Indeks chromatyczny grafu pełnego K_n wynosi:

$$\bar{\chi}(K_n) = \begin{cases} n-1 & \text{jeżeli } n \text{ parzyste} \\ n & \text{jeżeli } n \text{ nieparzyste} \end{cases}$$

Indeks chromatyczny grafu cyklicznego C_n wynosi:

$$\bar{\chi}(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{gdy } n - \text{parzyste}, \\ 3 & \text{gdy } n - \text{nieparzyste}. \end{cases}$$

Twierdzenie Königa, 1916

Jeżeli w grafie dwudzielnym $G = (V, E)$ największy stopień wierzchołka jest równy Δ, to jego indeks chromatyczny

$$\bar{\chi}(G) = \Delta$$

Twierdzenie Vizinga, 1964

Jeżeli graf $G = (V, E)$ jest grafem prostym, w którym największy stopień wierzchołka wynosi Δ, to indeks chromatyczny spełnia nierówność

$$\Delta \leq \bar{\chi}(G) \leq \Delta + 1.$$

Graf G nazywamy **grafem planarnym** wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka geometryczna reprezentacja tego grafu, na której dowolne dwie krawędzie mogą mieć co najwyżej jeden punkt wspólny, będący wierzchołkiem incydentnym z tymi krawędziami. Graf, który nie jest planarny nazywamy **grafem nieplanarnym**.

Reprezentacja planarnego grafu G dzieli płaszczyznę na maksymalne i rozłączne podzbiory. Zbiory te nazywamy **regionami**.

Twierdzenie Eulera, 1750

Niech dany będzie spójny graf planarny o n wierzchołkach, m krawędziach i f regionach. Wówczas zachodzi związek

$$f = m - n + 2$$

Jeżeli graf G jest planarnym, prostym grafem spójnym mającym n wierzchołków i m krawędzi, to

$$m \leq 3n - 6.$$

Jeżeli ponadto graf G nie ma trójkątów (czyli cykli długości 3), to

$$m \leq 2n - 4.$$

Graf K_5 jest grafem nieplanarnym

Graf $K_{3,3}$ nie jest grafem planarnym.

Twierdzenie Kuratowskiego, 1930

Dany graf G jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera podgrafu homeomorficznego z grafem K_5 lub z grafem $K_{3,3}$.

Mówimy, że regiony grafu planarnego są **regionalnie** $k-$**kolorowalne** (można je pokolorować k kolorami), jeśli żadne dwa regiony przyległe nie mają tego samego koloru.

Najmniejsza liczbę k taką, że regiony grafu planarnego G są regionalnie $k-$kolorowalne nazywamy **liczbą chromatyczną** regionów tego grafu i oznaczać będziemy $\mu(G)$.

Regiony grafu można pokolorować dwoma kolorami wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wierzchołek grafu jest stopnia parzystego.

Graf kubiczny można pokolorować trzema barwami wtedy i tylko wtedy, gdy jest dwudzielny.

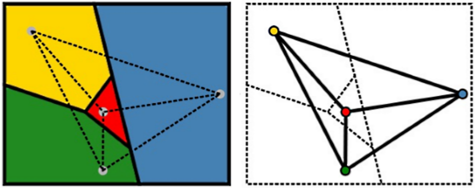
Każda graf planarny może być pokolorowany czterema kolorami.

Historia:

Pierwszy „dowód" pojawił się w roku 1879. Przedstawił go Alfred Kempe, londyński prawnik. Dowód okazał się błędny, ale był to jeden z najbardziej znanych fałszywych dowodów w historii matematyki.

Twierdzenie o czterech kolorach zostało udowodnione dopiero w 1976 roku przez dwóch amerykańskich matematyków K. Appela i W. Hakena. Był to bardzo skomplikowany dowód wspomagany komputerowo.

W 2004 roku pojawił się nowy dowód tego wyniku, również wykorzystujący komputer, ale obejmujący tylko 600 redukowalnych konfiguracji, które można sprawdzić na laptopie w ciągu kilku godzin. Jego autorami są Robertson, Sanders, Seymour i Thomas z Atlanty.



Do pokolorowania każdej mapy wystarczą 4 kolory

Przykładowe zastosowanie – wystarczą 4 częstotliwości nadawania w sieci GSM, by zapobiec interferencji z sąsiednich stacji nadawczych.

Najmniejszy *dość trudny* graf – najmniejszy graf G, dla którego algorytm <u>może</u> użyć więcej kolorów niż $\chi(G)$.

Najmniejszy *trudny* graf – najmniejszy graf G, dla którego algorytm <u>musi</u> użyć więcej kolorów niż $\chi(G)$.

Algorytm sekwencyjny S można opisać następująco:

Uporządkuj w dowolny sposób wierzchołki grafu G $v_1,\ldots,v_n$.

Koloruj wierzchołki zachłannie zgodnie z przyjętą permutacją

Własności:

algorytm statyczny – kolejność wierzchołków ustalona na początku nie zmienia się podczas realizacji algorytmu

Ścieżka P_4 jest najmniejszym dość trudnym grafem

Graf trudny nie istnieje

Algorytm *LF* (largest first) można opisać następująco:

Uporządkuj wierzchołki grafu G nierosnąco według stopni $v_1,\dots,v_n$.

Koloruj wierzchołki zachłannie zgodnie z przyjętą permutacją

Własności:

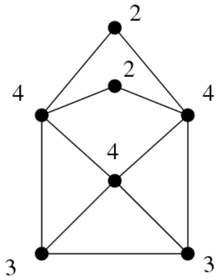
algorytm statyczny – kolejność wierzchołków ustalona na początku nie zmienia się podczas realizacji algorytmu

Ścieżka P_6 jest najmniejszym dość trudnym grafem:

Kolejność wierzchołków: v_2, v_5, v_3, v_4, v_1, v_6.

Własności algorytm *LF*

najmniejszym trudnym grafem do kolorowania jest „koperta”, która jest grafem 3-barwnym, natomiast *LF* zużywa czterech kolorów:



Algorytm *SL* (smallest last) składa się z dwóch etapów:

- faza redukcji grafu: znajdujemy wierzchołek o minimalnym stopniu i usuwamy go z grafu (powtarzamy dopóki graf nie jest pusty).
- kolorujemy wierzchołki zachłannie w kolejności ustalonej w poprzednim kroku, zaczynając od wierzchołków usuwanych później.

Własności:

- Algorytm statyczny
- Przypadki pozytywne: drzewa, cykle, grafy jednocykliczne, kola, grafy Mycielskiego, grafy Johnsona, grafy planarne

Algorytm *SLF* (saturacyjny LF) można opisać następująco:
while istnieją niepokolorowane wierzchołki **do begin**
znajdź wierzchołek o maksymalnym stopniu spośród wierzchołków o maksymalnym stopniu nasycenia;
pokoloruj znaleziony wierzchołek zachłannie;
end

Uwaga *Stopień nasycenia* wierzchołka to ilość różnych kolorów incydentnych z tym wierzchołkiem.

Przypadki pozytywne: grafy dwudzielne (w tym drzewa i grafy Johnsona), cykle, koła, kaktusy
Przypadki negatywne: grafy trójdzielne