

**Lista 2**  
**Ciągi**

**Z. 1.** Dla podanych ciągów napisać wzory określające wskazane wyrazy:

a)  $a_n = (n-1)!, a_{n+1}$ ,

b)  $b_n = n^{n+1}, b_{n^2-1}$ ,

**Z. 2.** Które z podanych ciągów są ograniczone:

a)  $a_n = \sin \frac{2\pi}{n+1}$ ,

b)  $a_n = \cos n^2$ ,

c)  $a_n = \frac{1-8n}{1-7\sqrt{n}}$ ,

**Z. 3.** Zbadać, czy podane ciągi są ograniczone z dołu, z góry, czy są ograniczone

a)  $a_n = \frac{4+\cos n}{3-2\sin n}$ ,

b)  $a_n = \sqrt[3]{3^n + 1}$ ,

c)  $a_n = \frac{5^n - 2}{2^n + 7}$ ,

d)  $a_n = \sqrt{n+6} - \sqrt{n+1}$ ,

e)  $a_n = \frac{1}{5^{1+1}} + \frac{1}{5^{2+1}} + \dots + \frac{1}{5^{n+n}}$ ,

f)  $a_n = 4^n - 5^n$ .

**Z. 4.** Zbadać, czy podane ciągi są monotoniczne od pewnego miejsca

a)  $a_n = \frac{3n+1}{n+3}$ ,

b)  $a_n = \frac{n!}{2^n}$ ,

c)  $a_n = \frac{1}{n^2 - 4n + 5}$ ,

d)  $a_n = \frac{5^n}{4^n + 6^n}$ ,

e)  $a_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$ .

**Definicja. Ciąg arytmetyczny**

$n$ -ty wyraz ciągu arytmetycznego o pierwszym wyrazie  $a_1$  i różnicy  $r$

$$a_n = a_1 + (n-1)r.$$

Wzór na sumę

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n.$$

Między sąsiednimi wyrazami ciągu arytmetycznego zachodzi związek

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

dla  $n \geq 2$ .

**Z. 5.** Suma drugiego i piątego wyrazu ciągu arytmetycznego wynosi 19, a ich iloczyn jest równy 70. Znaleźć pierwszy wyraz i różnicę ciągu.

**Z. 6.** Obliczyć sumę wszystkich liczb trzycyfrowych podzielnych przez 3.

**Definicja. Ciąg geometryczny**

$n$ -ty wyraz ciągu geometrycznego o danym pierwszym wyrazie  $a_1$  i ilorazie  $q$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Wzór na sumę

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \begin{cases} a_1 \frac{1-q^n}{1-q} & \text{dla } q \neq 1, \\ n \cdot a_1 & \text{dla } q = 1 \end{cases}.$$

Między sąsiednimi wyrazami ciągu geometrycznego zachodzi związek

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

dla  $n \geq 2$ .

**Z. 7.** Czy ciąg  $\sqrt{2} + \sqrt{3}, -2, 4\sqrt{3} - 4\sqrt{2}$  jest ciągiem geometrycznym?

**Z. 8.** Iloczyn pierwszych trzech wyrazów ciągu geometrycznego wynosi 8, a ich suma jest równa  $\frac{21}{2}$ . Znaleźć pierwszy wyraz i iloraz ciągu.

**Z. 9.** Dla jakich wartości  $x$  liczby

$$1 - 2\sqrt{6}x, \sqrt{8x-1}, 1 + 2\sqrt{6}x$$

tworzą ciąg geometryczny?

**Z. 10.** a) Przez dwa kolejne dni notowań indeks giełdowy wzrastał po 5% dziennie, a przez kolejne dwa dni spadał po 5% dziennie. Jaka była procentowa zmiana wartości tego indeksu po czwartym dniu notowań?

b) Przez dwa kolejne dni notowań indeks giełdowy spadał po 5% dziennie, a przez kolejne dwa dni rósł o 5% dziennie. Jaka była procentowa zmiana wartości tego indeksu po czwartym dniu notowań?

c) Pierwszego dnia indeks wzrósł o 5%, drugiego dnia spadł o 5%, trzeciego dnia znów wzrósł o 5% i czwartego dnia ponownie odnotował pięcioprocentowy spadek. Jaka była procentowa zmiana wartości tego indeksu po czwartym dniu notowań?

d) Przez kolejnych 50 dni roboczych indeks rósł codziennie o 5%. Jaka była procentowa zmiana wartości tego indeksu po pięćdziesiątym notowaniu?

**Z. 11.** Zakładając, że średni przyrost naturalny na Ziemi równy jest 1,3% rocznie obliczyć po jakim czasie liczba ludzi na planecie się podwoi.

**Z. 12.** Niech  $a_n$  będzie ciągiem arytmetycznym, wykaż, że

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

**Z. 13.** Niech  $a_n$  będzie ciągiem arytmetycznym o różnicy  $r \neq 0$ , takim że  $a_n \neq 0$  dla  $n \geq 1$ , wykaż, że

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{1}{r} \left( \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n} \right).$$

**Z. 14.** Korzystając z definicji granicy właściwej ciągu uzasadnić równości

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2+1} = 0,$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 1.$

Definicja granicy właściwej ciągu  $(a_n)$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall \substack{n \geq n_0 \\ n \in \mathbb{N}} |a_n - a| < \epsilon.$$