05 Geometria analityczna

17 listopada 2018

Elementy trójwymiarowej przestrzeni rzeczywistej $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ możemy interpretować co najmniej na trzy sposoby, tzn. jako:

1 zbiór punktów (x, y, z) będziemy je oznaczać dużymi literami A, B, C itd. Liczby rzeczywiste x, y, z nazywamy współrzędnymi punktu $A = (x, y, z)$.

2 zbiór wszystkich wektorów zaczepionych $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{v}$ itd. Wektory te mają wspólny początek w punkcie $O = (0, 0, 0)$. Każdy punkt $P = (x, y, z)$ wyznacza dokładnie jeden wektor wodzący $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$.

3 zbiór wszystkich wektorów swobodnych $\vec{u}$, przy czym przez wektor swobodny $\vec{u}$ rozumiemy zbiór wszystkich wektorów zaczepionych w dowolnym punkcie, które mają tę samą długość, ten sam zwrot oraz ten sam kierunek co wektor $\vec{u}$.

Każde dwa różne punkty $A = (x_a, y_a, z_a)$ oraz $B = (x_b, y_b, z_b)$ wyznaczają dwa wektory swobodne

$$\overrightarrow{AB} = (x_b - x_a, y_b - y_a, z_b - z_a) \quad \text{oraz} \quad \overrightarrow{BA} = (x_a - x_b, y_a - y_b, z_a - z_b)\,;$$

wektor $\overrightarrow{BA}$ nazywamy wektorem przeciwnym do wektora $\overrightarrow{AB}$. Punkt A (odpowiednio B) nazywamy początkiem (końcem) wektora $\overrightarrow{AB}$. Początek (koniec) danego wektora jest końcem (początkiem) wektora do niego przeciwnego.

Niech $\overrightarrow{u} = (x_u, y_u, z_u)$ oraz $\overrightarrow{v} = (x_v, y_v, z_v)$ będą dowolnymi wektorami oraz niech $\alpha \in \mathbb{R}$. Wówczas:

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \stackrel{df}{=} (x_u + x_v, y_u + y_v, z_u + z_v) \quad \text{oraz} \quad \alpha \cdot \overrightarrow{u} \stackrel{df}{=} (\alpha x_u, \alpha y_u, \alpha z_u)\,.$$

Długość wektora $\overrightarrow{u}$ określamy wzorem:

$$\|\overrightarrow{u}\| \stackrel{df}{=} \sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2}.$$

Iloczyn skalarny

Definicja *Iloczyn skalarny wektorów* $\vec{u}$ *oraz* $\vec{v}$ *to liczba (skalar)* $\vec{u} \circ \vec{v}$ *określona wzorem*

$$\vec{u} \circ \vec{v} \stackrel{df}{=} \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \measuredangle(\vec{u}, \vec{v}),$$

gdzie $\measuredangle(\vec{u}, \vec{v})$ *to kąt między wektorami* $\vec{u}$ *i* $\vec{v}$*; zakładamy, że* $0 \leq \measuredangle(\vec{u}, \vec{v}) \leq \pi$.

jeżeli $\vec{u} = (x_u, y_u, z_u)$ oraz $\vec{v} = (x_v, y_v, z_v)$ to $\vec{u} \circ \vec{v} = x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v + z_u \cdot z_v$.

kąt między niezerowymi wektorami $\vec{u}$ i $\vec{v}$ wyraża się wzorem

$$\measuredangle(\vec{u}, \vec{v}) = \arccos \frac{x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v + z_u \cdot z_v}{\sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2} \cdot \sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2}}.$$

Własności iloczynu skalarnego ($\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3, \alpha \in \mathbb{R}$):

a) $\vec{u} \circ \vec{v} = \vec{v} \circ \vec{u}$; (symetryczny);

b) $\vec{u} \circ \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \geq 0$, (dodatnio określony);

c) $(\alpha \cdot \vec{u}) \circ \vec{v} = \alpha \cdot (\vec{u} \circ \vec{v})$;

d) $(\vec{u} + \vec{v}) \circ \vec{w} = (\vec{u} \circ \vec{w}) + (\vec{v} \circ \vec{w})$; (dwuliniowy);

e) $|\vec{u} \circ \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$ (nierówność Schwarza);

f) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \circ \vec{v} = 0$ (warunek ortogonalności wektorów).

Dla ustalonego wektora $A = (a, b, c)$ zbiór wektorów X do niego prostopadłych tworzy podprzestrzeń liniową zadaną równaniem $ax + by + cz = 0$.

Iloczyn wektorowy

Niech $\overrightarrow{u} = (x_u, y_u, z_u)$ oraz $\overrightarrow{v} = (x_v, y_v, z_v)$ będą dowolnymi wektorami z przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Definicja *Iloczynem wektorowym wektorów* $\overrightarrow{u}$ *oraz* $\overrightarrow{v}$ *nazywamy wektor* $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ *określony wzorem*

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} \stackrel{df}{=} (y_u z_v - y_v z_u, x_v z_u - x_u z_v, x_u y_v - x_v y_u)\,.$$

wzór można wyrazić w postaci wyznacznika

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix},$$

gdzie $\overrightarrow{i} = (1,0,0)\,,\ \overrightarrow{j} = (0,1,0)\,,\ \overrightarrow{k} = (0,0,1)\,.$

Można również wykazać, że $\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\| \cdot \sin \measuredangle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$

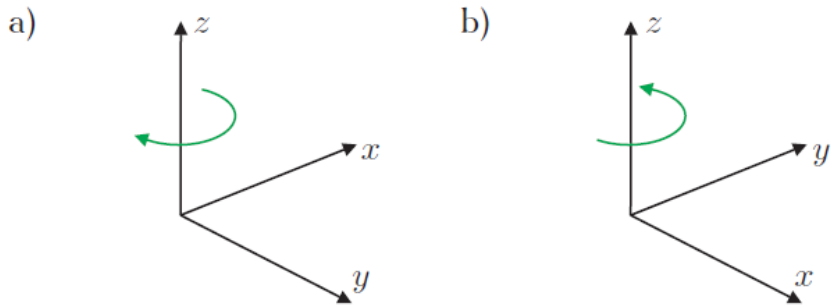
gdzie, podobnie jak poprzednio, $\measuredangle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ to kąt między wektorami $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ $(0 \leq \measuredangle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \leq \pi)$.

Własności iloczynu wektorowego ($\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3, \alpha \in \mathbb{R}$):

a) $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$;
b) $(\alpha \cdot \vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha \cdot \vec{v}) = \alpha \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$;
c) $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})$;
d) $|\vec{u} \times \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$;
e) $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \{\vec{u} \parallel \vec{v} \vee \vec{u} = 0 \vee \vec{v} = 0\}$ (warunek równoległości wektorów);
f) $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}$, $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{v}$.

Orientacja układu współrzędnych

Rozróżniamy dwie orientacje układu współrzędnych $Oxyz$ – orientację dodatnią (układ prawoskrętny) oraz ujemną (układ lewoskrętny). Orientacja układu zależy od wzajemnego położenia osi układu Ox, Oy oraz Oz. Jeżeli wyprostowany kciuk prawej ręki umieścimy w ten sposób, aby wskazywał dodatnią część osi Oz, a zgięte palce wskażą kierunek obrotu od osi Ox do osi Oy (odpowiednio: od osi Oy do osi Ox) to wówczas mamy do czynienia z układem prawoskrętnym (lewoskrętnym).



Wykres Orientacja układu współrzędnych: a) układ lewoskrętny, b) układ prawoskrętny.

Iloczyn wektorowy $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ dwóch niezerowych, niewspółliniowych wektorów $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ma tę własność, że orientacja trójki wektorów $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ jest zgodna z orientacją układu współrzędnych $Oxyz$.

Iloczyn mieszany

Niech $\overrightarrow{u} = (x_u, y_u, z_u)$, $\overrightarrow{v} = (x_v, y_v, z_v)$, $\overrightarrow{w} = (x_w, y_w, z_w)$ będą dowolnymi elementami przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Definicja *Iloczynem mieszanym uporządkowanej trójki wektorów* $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ *nazywamy liczbę* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ *określoną wzorem*

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \stackrel{df}{=} (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \circ \overrightarrow{w}.$$

Własności iloczynu mieszanego ($\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3, \alpha \in \mathbb{R}$):

a) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$;
b) $\alpha \cdot (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\alpha \cdot \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \alpha \cdot \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \alpha \cdot \vec{w})$;
c) $(\vec{u_1} + \vec{u_2}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u_1}, \vec{v}, \vec{w}) + (\vec{u_2}, \vec{v}, \vec{w})$
d) $|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|$;

e) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{vmatrix}$.

iloczyn mieszany $|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$ (objętość równoległościanu rozpiętego przez $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, czyli $6 \cdot$ objętość czworościanu.

Płaszczyzna w przestrzeni $\mathbb{R}^3$

Równanie normalne płaszczyzny

Równanie płaszczyzny π przechodzącej przez punkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ oraz prostopadłej do niezerowego wektora $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$ ma postać

$$\pi : \qquad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

równanie

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

gdzie $A^2 + B^2 + C^2 > 0$, również opisuje płaszczyznę - jej wektorem normalnym jest wektor $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$, a przechodzi ona przez punkty $P_1 = \left(-\frac{D}{A}, 0, 0\right)$, $P_2 = \left(0, -\frac{D}{B}, 0\right)$, $P_3 = \left(0, 0, -\frac{D}{C}\right)$ (o ile oczywiście $ABC \neq 0$).

Równanie odcinkowe płaszczyzny

Równanie postaci

$$\pi : \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

w którym $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, nazywamy *równaniem odcinkowym* płaszczyzny π. Płaszczyzna opisana równaniem przecina osie Ox, Oy oraz Oz układu współrzędnych $Oxyz$ w punktach równych odpowiednio $P_x = (a, 0, 0)$, $P_y = (0, b, 0)$, $P_z = (0, 0, c)$.

Równanie parametryczne płaszczyzny

Równanie płaszczyzny π przechodzącej przez punkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ i równoległej do dwóch niewspółliniowych (nieleżących na jednej prostej) wektorów $\overrightarrow{v} = (x_v, y_v, z_v)$, $\overrightarrow{w} = (x_w, y_w, z_w)$ ma postać:

$$\pi : \qquad \begin{cases} x = x_0 + rx_v + sx_w \\ y = y_0 + ry_v + sy_w \\ z = z_0 + rz_v + sz_w \end{cases}, \quad \text{gdzie } r, s \in \mathbb{R}.$$

Jest to tzw. *równanie parametryczne* płaszczyzny.

Równanie płaszczyzny przechodzącej przez trzy punkty

Każde trzy niewspółliniowe punkty P_1, P_2, P_3 wyznaczają dokładnie jedną płaszczyznę π, która je zawiera. Niech $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ $(i = 1, 2, 3)$. Punkt $P = (x, y, z)$ leży na płaszczyźnie wyznaczonej przez punkty P_1, P_2, P_3 wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $\overrightarrow{P_1P}$, $\overrightarrow{P_1P_2}$ oraz $\overrightarrow{P_1P_3}$ są liniowo zależne. Równanie poszukiwanej płaszczyzny π można więc wyrazić w postaci:

$$\pi : \quad \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Prosta w przestrzeni $\mathbb{R}^3$

Równanie parametryczne prostej

Rozważmy dowolny punkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ oraz niezerowy wektor $\overrightarrow{v} = (x_v, y_v, z_v)$. Równanie

$$l: \quad \begin{cases} x = x_0 + tx_v \\ y = y_0 + ty_v \\ z = z_0 + tz_v \end{cases}, \quad \text{gdzie } t \in \mathbb{R}$$

jest równaniem prostej l przechodzącej przez punkt P i równoległej do wektora $\overrightarrow{v}$.

Równanie kierunkowe prostej

Przypuśćmy, że prosta l jest zapisana w postaci parametrycznej oraz załóżmy, że żadna ze współrzędnych wektora $\overrightarrow{v}$ nie jest zerem. Wyliczając z każdego z trzech równań układu parametr t, otrzymujemy równanie kierunkowe prostej:

$$l: \qquad \frac{x - x_0}{x_v} = \frac{y - y_0}{y_v} = \frac{z - z_0}{z_v}.$$

Równanie krawędziowe prostej

Rozważmy dwie nierównoległe płaszczyzny

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{oraz} \quad \pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Częścią wspólną tych płaszczyzn jest prosta

$$l : \qquad \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases};$$

równanie to jej *równanie krawędziowe*.

Zauważmy, że płaszczyzny π_1 oraz π_2 nie są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy ich wektory normalne $\overrightarrow{n_1} = (A_1, B_1, C_1)$ i $\overrightarrow{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$ nie są równoległe, tj. $\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} \neq \overrightarrow{0}$. Wektor $\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}$ jest jednocześnie wektorem kierunkowym (równoległym) prostej l.

Odległość punktu od płaszczyzny

Łatwo wykazać, że odległość punktu $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ od płaszczyzny $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ wyraża się wzorem

$$d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Odległość punktu od prostej

Można wykazać, że odległość punktu P_0 od prostej l przechodzącej przez punkt P_1 i równoległej do wektora $\overrightarrow{v}$ wyraża się wzorem

$$d\left(P_0, l\right) = \frac{\left\|\overrightarrow{P_1P_0} \times \overrightarrow{v}\right\|}{\|\overrightarrow{v}\|}.$$

Odległość między płaszczyznami

Rozważmy dwie płaszczyzny równoległe $\pi_1 : Ax + By + Cz + D_1 = 0$ oraz $\pi_2 : Ax + By + Cz + D_2 = 0$ (płaszczyzny równoległe mają ten sam wektor normalny). Ze wzoru wynika natychmiast, że odległość między tymi płaszczyznami wyraża się wzorem

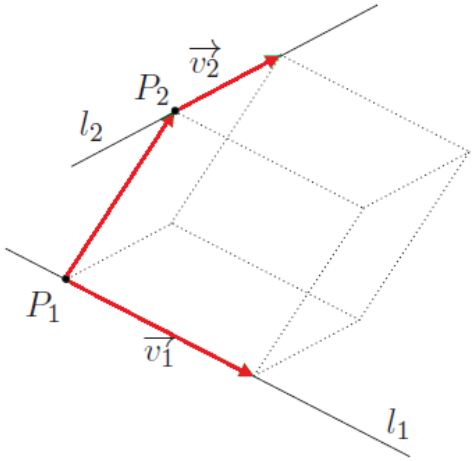
$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Proste równoległe

W przypadku, gdy proste l_1 i l_2 są równoległe (możemy wówczas przyjąć, że $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v_2}$), wzór na odległość między nimi:

$$d\left(l_1, l_2\right) = \frac{\left\|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{v_1}\right\|}{\|\overrightarrow{v_1}\|}.$$

Proste skośn



Jeżeli proste l_1 i l_2 nie są równoległe (tzn. $\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} \neq \overrightarrow{0}$), odległość między nimi obliczamy ze wzoru

$$d\left(l_1, l_2\right) = \frac{\left|\left(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\right)\right|}{\|\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}\|}.$$

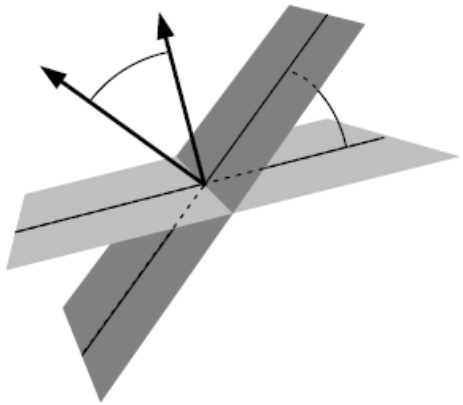
Kąty między wektorami:

$$\cos \sphericalangle (U, V) = \frac{U \circ V}{|U| \cdot |V|} \qquad \sin \sphericalangle (U, V) = \frac{|U \times V|}{|U| \cdot |V|}$$

Kąt między prostymi to mniejszy z dwu kątów między ich wektorami kierunkowymi.

Kąt między prostymi:

$$\sphericalangle (p, l) = \sphericalangle (U, V) \quad \text{dla} \;\; p = \{P + tU : t \in \mathbf{R}\}, \;\; l = \{L + sV : s \in \mathbf{R}\} \;\; \text{i} \;\; \sphericalangle (U, V) \leq \frac{\pi}{2}$$

Można go wyznaczyć również wtedy, gdy proste się nie przecinają. (Proste, które się nie przecinają ani nie są równoległe, nazywamy **skośny mi**.)

Kąt między płaszczyznami jest równy kątowi między ich wektorami normalnymi (wybieramy znak wektora normalnego tak, aby kąt ten nie przekraczał $\pi/2$).