

Lista 4, budownictwo, gr.5

Całka podwójna.

Zadanie 1. Obliczyć całkę  $\iint_D F(x, y) dx dy$ , jeżeli

- (a)  $F(x, y) = xy$ ,  $D = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$ ,
- (b)  $F(x, y) = x^2 y e^{xy}$ ,  $D = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$ ,
- (c)  $F(x, y) = e^{x+y}$ ,  $D = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ ,
- (d)  $F(x, y) = x \sin(y)$ ,  $D = \{(x, y): 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$ ,
- (e)  $F(x, y) = \frac{x^2}{1+y^2}$ ,  $D = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ ,
- (f)  $F(x, y) = \frac{1}{(x+y+1)^2}$ ,  $D = \{(x, y): 3 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 2\}$ ,
- (g)  $F(x, y) = \sqrt{xy}$ ,  $D = \{(x, y): 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ ,
- (h)  $F(x, y) = x^2 y \cos(xy^2)$ ,  $D = \{(x, y): 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq 2\}$ ,
- (i)  $F(x, y) = x^3 y^2$ , obszar  $D$  jest kołem  $x^2 + y^2 \leq R^2$ ,
- (j)  $F(x, y) = x^2 + y$ , obszar  $D$  jest ograniczony parabolami  $y = x^2$ ,  $y^2 = x$ ,
- (k)  $F(x, y) = \frac{x^2}{y^2}$ , obszar  $D$  jest ograniczony krzywymi  $x = 2$ ,  $x = y$ ,  $xy = 1$ ,
- (l)  $F(x, y) = \cos(x+y)$ , obszar  $D$  jest trójkątem ograniczonym prostymi  $x = 0$ ,  $y = \pi$ ,  $x = y$ ,
- (m)  $F(x, y) = x + y$ , obszar  $D$  jest trójkątem ograniczonym prostymi  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x + y = 6$ .

Zadanie 2. Wprowadzając współrzędne biegunowe obliczyć następujące całki po obszarach ograniczonych wskazanymi krzywymi

- (a)  $\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ , obszar  $D: x^2 + y^2 = 2$ ,
- (b)  $\iint_D y dx dy$ , obszar  $D: x^2 + y^2 = 4$ ,  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $x = y$ ,  $y = 0$  ( $y \geq 0$ ),
- (c)  $\iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$ , obszar  $D: x^2 + y^2 = 4$ ,  $x = 0$ ,  $y = 1$  ( $x \leq 0$ ,  $y \geq 1$ ),
- (d)  $\iint_D x dx dy$ , obszar  $D: x^2 + (y-1)^2 = 1$ ,  $y = x$ , ( $x \geq y$ ),
- (e)  $\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$ , obszar  $D: (x^2 + y^2)^2 - 4x(x^2 + y^2) = 4y^2$ ,  $x^2 + y^2 = 4$  ( $x \geq 0$ ),
- (f)  $\iint_D x \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , obszar  $D: (x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ ,  $x = 0$  ( $x \geq 0$ ).

Zadanie 3. Obliczyć całkę  $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ , gdzie  $D$  jest obszarem ograniczonym krzywą  $x^2 + y^2 = 6x$ .

Zadanie 4. Obliczyć  $\iint_D (x+y) dx dy$ , gdzie  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$ .

Zadanie 5. Obliczyć  $\iint_D \frac{xy \cdot e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$ , gdzie  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4, y \geq |x|\}$ .

Zadanie 6. Obliczyć  $\iint_D xy dx dy$ , gdzie  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2x\}$ .

Zadanie 7. Obliczyć  $\iint_D \ln(x^2 + y^2) dx dy$ , gdzie  $D = \{(x, y) : r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$ ,  $r, R > 0$ .

Zadanie 8. Obliczyć  $\iint_D \arctg \frac{y}{x} dx dy$ , gdzie  $D = \{(x, y) : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16, -x \leq y, y \geq x\}$ .

Zadanie 9. Obliczyć pole płata powierzchniowego wyciętego walcem  $x^2 + y^2 = 4$  ze sfery  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ .