W2 liczby zespolone, ciało $\mathbb{C}$

19 października 2018

LICZBY ZESPOLONE

Definicja (zbioru liczb zespolonych)
Zbiór $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ z działaniami
(i) $(x, y) \boxed{+} (x', y') := (x + x', y + y'), \quad (x, y), (x', y') \in \mathbb{C}$
(ii) $(x, y) \odot (x', y') := (x \cdot x' - y \cdot y', x \cdot y' + x' \cdot y), \quad (x, y), (x', y') \in \mathbb{C}$
nazywa się **zbiorem liczb zespolonych**

Uwaga 1

Liczby zespolone postaci $(x, 0), (y, 0)$ możemy identyfikowac z liczbami rzeczywistymi x, y.

Rzeczywiście $(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0)$ oraz $(x, 0) \cdot (y, 0) = (xy, 0)$.

Wykonywanie działań w podzbiorze $\{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$ zbioru liczb zespolonych polega na wykonywaniu zwykłych działań na liczbach rzeczywistych na pierwszych elementach par.

Dowolną liczbę zespoloną $z = (a, b)$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ możemy przedstawić w postaci $z = (a, b) = (a, 0)(1, 0) + (b, 0)(0, 1)$.

Oznaczając liczbę $(0, 1)$ przez i i identyfikując liczbę postaci $(x, 0)$ z liczbą rzeczywistą x otrzymamy $z = a + bi$.

Mamy przy tym $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$ czyli $i^2 = -1$.

LICZBY ZESPOLONE

Uwaga 1

Liczby zespolone postaci $(x, 0), (y, 0)$ możemy identyfikowac z liczbami rzeczywistymi x, y.

Rzeczywiście $(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0)$ oraz $(x, 0) \cdot (y, 0) = (xy, 0)$.

Wykonywanie działań w podzbiorze $\{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$ zbioru liczb zespolonych polega na wykonywaniu zwykłych działań na liczbach rzeczywistych na pierwszych elementach par.

Dowolną liczbę zespoloną $z = (a, b)$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ możemy przedstawić w postaci $z = (a, b) = (a, 0)(1, 0) + (b, 0)(0, 1)$.

Oznaczając liczbę $(0, 1)$ przez i i identyfikując liczbę postaci $(x, 0)$ z liczbą rzeczywistą x otrzymamy $z = a + bi$.

Mamy przy tym $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$ czyli $i^2 = -1$.

LICZBY ZESPOLONE

Uwaga 1

Liczby zespolone postaci $(x,0),(y,0)$ możemy identyfikowac z liczbami rzeczywistymi x,y.

Rzeczywiście $(x,0)+(y,0)=(x+y,0)$ oraz $(x,0)\cdot(y,0)=(xy,0)$.

Wykonywanie działań w podzbiorze $\{(a,0): a\in\mathbb{R}\}$ zbioru liczb zespolonych polega na wykonywaniu zwykłych działań na liczbach rzeczywistych na pierwszych elementach par.

Dowolną liczbę zespoloną $z=(a,b)$, gdzie $a,b\in\mathbb{R}$ możemy przedstawić w postaci $z=(a,b)=(a,0)(1,0)+(b,0)(0,1)$.

Oznaczając liczbę $(0,1)$ przez i i identyfikując liczbę postaci $(x,0)$ z liczbą rzeczywistą x otrzymamy $z=a+bi$.

Mamy przy tym $i^2=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)=-1$ czyli $i^2=-1$.

LICZBY ZESPOLONE

Uwaga 1

Liczby zespolone postaci $(x,0),(y,0)$ możemy identyfikowac z liczbami rzeczywistymi x,y.

Rzeczywiście $(x,0)+(y,0)=(x+y,0)$ oraz $(x,0)\cdot(y,0)=(xy,0)$.

Wykonywanie działań w podzbiorze $\{(a,0) : a\in\mathbb{R}\}$ zbioru liczb zespolonych polega na wykonywaniu zwykłych działań na liczbach rzeczywistych na pierwszych elementach par.

Dowolną liczbę zespoloną $z=(a,b)$, gdzie $a,b\in\mathbb{R}$ możemy przedstawić w postaci $z=(a,b)=(a,0)(1,0)+(b,0)(0,1)$.

Oznaczając liczbę $(0,1)$ przez i i identyfikując liczbę postaci $(x,0)$ z liczbą rzeczywistą x otrzymamy $z=a+bi$.

Mamy przy tym $i^2=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)=-1$ czyli $i^2=-1$.

LICZBY ZESPOLONE

Uwaga 1

Liczby zespolone postaci $(x,0),(y,0)$ możemy identyfikowac z liczbami rzeczywistymi x,y.

Rzeczywiście $(x,0)+(y,0)=(x+y,0)$ oraz $(x,0)\cdot(y,0)=(xy,0)$.

Wykonywanie działań w podzbiorze $\{(a,0): a\in\mathbb{R}\}$ zbioru liczb zespolonych polega na wykonywaniu zwykłych działań na liczbach rzeczywistych na pierwszych elementach par.

Dowolną liczbę zespoloną $z=(a,b)$, gdzie $a,b\in\mathbb{R}$ możemy przedstawić w postaci $z=(a,b)=(a,0)(1,0)+(b,0)(0,1)$.

Oznaczając liczbę $(0,1)$ przez i i identyfikując liczbę postaci $(x,0)$ z liczbą rzeczywistą x otrzymamy $z=a+bi$.

Mamy przy tym $i^2=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)=-1$ czyli $i^2=-1$.

Uwaga 1

Liczby zespolone postaci $(x, 0), (y, 0)$ możemy identyfikowac z liczbami rzeczywistymi x, y.

Rzeczywiście $(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0)$ oraz $(x, 0) \cdot (y, 0) = (xy, 0)$.

Wykonywanie działań w podzbiorze $\{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$ zbioru liczb zespolonych polega na wykonywaniu zwykłych działań na liczbach rzeczywistych na pierwszych elementach par.

Dowolną liczbę zespoloną $z = (a, b)$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ możemy przedstawić w postaci $z = (a, b) = (a, 0)(1, 0) + (b, 0)(0, 1)$.

Oznaczając liczbę $(0, 1)$ przez i i identyfikując liczbę postaci $(x, 0)$ z liczbą rzeczywistą x otrzymamy $z = a + bi$.

Mamy przy tym $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$ czyli $i^2 = -1$.

Definicja 2

Dla danej liczby zespolonej $z = a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ definiujemy

część rzeczywistą $Re\ z = a$

część urojoną $Im\ z = b$

sprzężenie $\overline{z} = a - bi$

moduł $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

oraz $arg\ z$ jako zbiór liczb rzeczywistych φ dla; których $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Jeżeli $\varphi \in (-\pi, \pi]$ to nazywamy go argumentem głównym i oznaczamy przez $Arg\ z$.

LICZBY ZESPOLONE

Definicja 2

Dla danej liczby zespolonej $z = a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ definiujemy

część rzeczywistą $Re\ z = a$

część urojoną $Im\ z = b$

sprzężenie $\overline{z} = a - bi$

moduł $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

oraz *arg* z jako zbiór liczb rzeczywistych φ dla; których $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Jeżeli $\varphi \in (-\pi, \pi]$ to nazywamy go argumentem głównym i oznaczamy przez *Arg z*.

LICZBY ZESPOLONE

Definicja 2

Dla danej liczby zespolonej $z = a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ definiujemy

część rzeczywistą $Re\ z = a$

część urojoną $Im\ z = b$

sprzężenie $\overline{z} = a - bi$

moduł $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

oraz $arg\ z$ jako zbiór liczb rzeczywistych φ dla; których $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Jeżeli $\varphi \ \in (-\pi, \pi]$ to nazywamy go argumentem głównym i oznaczamy przez $Arg\ z$.

LICZBY ZESPOLONE

Definicja 2

Dla danej liczby zespolonej $z = a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ definiujemy

część rzeczywistą $Re\ z = a$

część urojoną $Im\ z = b$

sprzężenie $\overline{z} = a - bi$

moduł $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

oraz *arg z* jako zbiór liczb rzeczywistych φ dla; których $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Jeżeli $\varphi\ \in (-\pi, \pi]$ to nazywamy go argumentem głównym i oznaczamy przez *Arg z*.

Definicja 2

Dla danej liczby zespolonej $z = a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ definiujemy

część rzeczywistą $Re\ z = a$

część urojoną $Im\ z = b$

sprzężenie $\overline{z} = a - bi$

moduł $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

oraz *arg* z jako zbiór liczb rzeczywistych φ dla; których $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Jeżeli $\varphi \in (-\pi, \pi]$ to nazywamy go argumentem głównym i oznaczamy przez *Arg z*.

Definicja 2

Dla danej liczby zespolonej $z = a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ definiujemy

część rzeczywistą $Re\ z = a$

część urojoną $Im\ z = b$

sprzężenie $\overline{z} = a - bi$

moduł $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

oraz *arg z* jako zbiór liczb rzeczywistych φ dla; których $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.
Jeżeli $\varphi \in (-\pi, \pi]$ to nazywamy go argumentem głównym i oznaczamy przez *Arg z*.

LICZBY ZESPOLONE

Definicja 2

Dla danej liczby zespolonej $z = a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ definiujemy

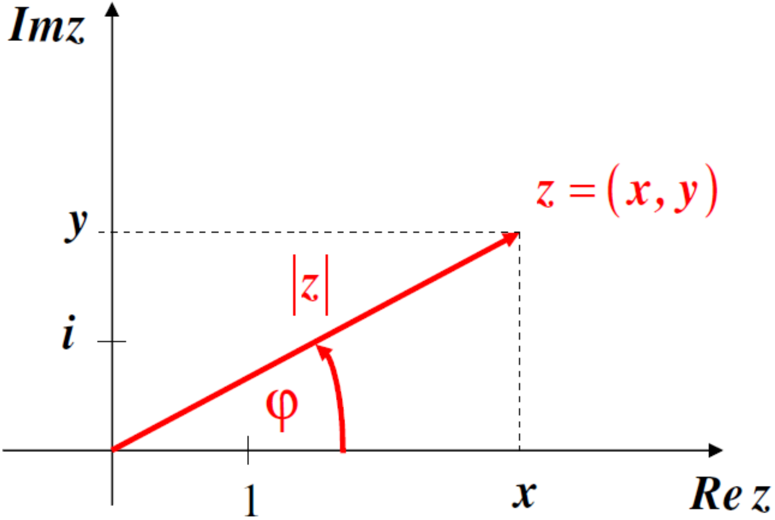
część rzeczywistą $Re\ z = a$

część urojoną $Im\ z = b$

sprzężenie $\overline{z} = a - bi$

moduł $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

oraz $arg\ z$ jako zbiór liczb rzeczywistych φ dla; których $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.
Jeżeli $\varphi \in (-\pi, \pi]$ to nazywamy go argumentem głównym i oznaczamy przez $Arg\ z$.


Imz
y
i
1
x
Re z
z = (x, y)
|z|
φ

Definicja 3

Dowolną liczbę zespoloną z możemy przedstawić w postaci nazywanej postacią trygonometryczną liczby zespolonej
$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, gdzie $\varphi \in arg\ z$.

Twierdzenie 4

Mnożąc liczby zespolone w postaci trygonometrycznej mnożymy moduły i dodajemy argumenty.

DOWÓD:

Niech $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ i $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ wtedy

$z_1 \cdot z_2 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$

$|z_1||z_2|(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)) =$

$|z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$.

LICZBY ZESPOLONE

Definicja 3

Dowolną liczbę zespoloną z możemy przedstawić w postaci nazywanej postacią trygonometryczną liczby zespolonej
$z = |z|(\cos\varphi + i \sin \varphi)$, gdzie $\varphi \in arg\ z$.

Twierdzenie 4

Mnożąc liczby zespolone w postaci trygonometrycznej mnożymy moduły i dodajemy argumenty.

DOWÓD:

Niech $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin \varphi_1)$ i $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin \varphi_2)$ wtedy

$z_1 \cdot z_2 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot |z_2|(\cos\varphi_2 + i \sin \varphi_2) =$

$|z_1||z_2| (\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin \varphi_1\sin \varphi_2 + i(\cos\varphi_1\sin \varphi_2 + \sin\varphi_1\cos \varphi_2)) =$

$|z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2))$.

LICZBY ZESPOLONE

Definicja 3

Dowolną liczbę zespoloną z możemy przedstawić w postaci nazywanej postacią trygonometryczną liczby zespolonej
$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, gdzie $\varphi \in arg\ z$.

Twierdzenie 4

Mnożąc liczby zespolone w postaci trygonometrycznej mnożymy moduły i dodajemy argumenty.

DOWÓD:

Niech $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ i $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ wtedy

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$|z_1||z_2|\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)\right) =$$

$$|z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

LICZBY ZESPOLONE

Definicja 3

Dowolną liczbę zespoloną z możemy przedstawić w postaci nazywanej postacią trygonometryczną liczby zespolonej
$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, gdzie $\varphi \in arg\ z$.

Twierdzenie 4

Mnożąc liczby zespolone w postaci trygonometrycznej mnożymy moduły i dodajemy argumenty.

DOWÓD:

Niech $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ i $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ wtedy

$z_1 \cdot z_2 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$

$|z_1||z_2|\,(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)) =$

$|z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$.

Definicja 3

Dowolną liczbę zespoloną z możemy przedstawić w postaci nazywanej postacią trygonometryczną liczby zespolonej
$z = |z|(\cos\varphi + i \sin \varphi)$, gdzie $\varphi \in arg\ z$.

Twierdzenie 4

Mnożąc liczby zespolone w postaci trygonometrycznej mnożymy moduły i dodajemy argumenty.

DOWÓD:

Niech $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin \varphi_1)$ i $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin \varphi_2)$ wtedy

$z_1 \cdot z_2 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot |z_2|(\cos\varphi_2 + i \sin \varphi_2) =$

$|z_1||z_2| \left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin \varphi_1\sin \varphi_2 + i(\cos\varphi_1\sin \varphi_2 + \sin\varphi_1\cos \varphi_2)\right) =$

$|z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2))$.

Definicja 3

Dowolną liczbę zespoloną z możemy przedstawić w postaci nazywanej postacią trygonometryczną liczby zespolonej
$z = |z|(\cos\varphi + i \sin \varphi)$, gdzie $\varphi \in arg\ z$.

Twierdzenie 4

Mnożąc liczby zespolone w postaci trygonometrycznej mnożymy moduły i dodajemy argumenty.

DOWÓD:

Niech $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin \varphi_1)$ i $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin \varphi_2)$ wtedy

$z_1 \cdot z_2 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot |z_2|(\cos\varphi_2 + i \sin \varphi_2) =$

$|z_1||z_2| (\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin \varphi_1\sin \varphi_2 + i(\cos\varphi_1\sin \varphi_2 + \sin\varphi_1\cos \varphi_2)) =$

$|z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2))$.

LICZBY ZESPOLONE

Twierdzenie 5

Dzieląc liczby zespolone w postaci trygonometrycznej dzielimy moduły i odejmujemy argumenty.

Twierdzenie 6

Podnosząc liczbę zespoloną w postaci trygonometrycznej do potęgi n podnosimy moduł do potęgi n i mnożymy argument oprzez n.

Twierdzenie 5

Dzieląc liczby zespolone w postaci trygonometrycznej dzielimy moduły i odejmujemy argumenty.

Twierdzenie 6

Podnosząc liczbę zespoloną w postaci trygonometrycznej do potęgi n podnosimy moduł do potęgi n i mnożymy argument oprzez n.

Uwaga (o mnożeniu liczb zespolonych)
Niech

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi}$$

$$w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi) = |w|e^{i\psi}$$

Wtedy $z \cdot w = |z||w|\left[\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)\right] = |z||w|e^{i(\varphi+\psi)}$

LICZBY ZESPOLONE

Uwaga (o dzieleniu liczb zespolonych)
Niech

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi}$$

$$w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi) = |w|e^{i\psi}$$

Wtedy $\dfrac{z}{w} = \dfrac{|z|}{|w|}\left[\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi)\right] = \dfrac{|z|}{|w|}e^{i(\varphi-\psi)}$

Twierdzenie (wzór de Moivre'a)

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad z^n = \left[|z|\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)\right]^n = |z|^n\left[\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right] = |z|^n e^{in\varphi}$$

LICZBY ZESPOLONE

Twierdzenie 7

Wszystkie pierwiastki stopnia n liczby zespolonej $|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, są postaci $\omega_k = \sqrt[n]{|z|}(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n})$, gdzie $k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, n-1\}$.

Twierdzenie 8

Niech $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ wtedy

$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

i jeśli $z_2 \neq 0$ to

$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$

LICZBY ZESPOLONE

Twierdzenie 7

Wszystkie pierwiastki stopnia n liczby zespolonej
$|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, są postaci $\omega_k = \sqrt[n]{|z|}(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n})$,
gdzie $k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, n-1\}$.

Twierdzenie 8

Niech z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ wtedy
$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

i jeśli $z_2 \neq 0$ to
$\overline{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

Twierdzenie 7

Wszystkie pierwiastki stopnia n liczby zespolonej $|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, są postaci $\omega_k = \sqrt[n]{|z|}(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n})$, gdzie $k \in \{0,1,2,3,\ldots,n-1\}$.

Twierdzenie 8

Niech $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$ wtedy

$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

i jeśli $z_2 \neq 0$ to $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

Twierdzenie 7

Wszystkie pierwiastki stopnia n liczby zespolonej $|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, są postaci $\omega_k = \sqrt[n]{|z|}(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n})$, gdzie $k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, n-1\}$.

Twierdzenie 8

Niech $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$ wtedy
$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

i jeśli $z_2 \neq 0$ to
$\overline{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

LICZBY ZESPOLONE

Twierdzenie 9

Niech $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ wtedy
$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$,

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$,

i jeśli $z_2 \neq 0$ to
$|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

Przykład 10

Obliczyć $(1+i)^{10}$.

Niech $z = 1 + i$ wówczs $|z| = \sqrt{2}$ zaś $Arg\, z = \frac{\pi}{4}$.

$z^{10} = \sqrt{2}^{10}(\cos\frac{10\pi}{4} + i\sin\frac{10\pi}{4}) = 2^5(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 32i$

Twierdzenie 9

Niech $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ wtedy
$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$,

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$,

i jeśli $z_2 \neq 0$ to
$|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

Przykład 10

Obliczyć $(1+i)^{10}$.

Niech $z = 1 + i$ wówczs $|z| = \sqrt{2}$ zaś $Arg\, z = \frac{\pi}{4}$.

$z^{10} = \sqrt{2}^{10}(\cos\frac{10\pi}{4} + i\sin\frac{10\pi}{4}) = 2^5(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 32i$

LICZBY ZESPOLONE

Twierdzenie 9

Niech $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ wtedy
$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$,

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$,

i jeśli $z_2 \neq 0$ to
$|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

Przykład 10

Obliczyć $(1+i)^{10}$.

Niech $z = 1 + i$ wówczs $|z| = \sqrt{2}$ zaś $Arg\, z = \frac{\pi}{4}$.

$z^{10} = \sqrt{2}^{10}(\cos\frac{10\pi}{4} + i\sin\frac{10\pi}{4}) = 2^5(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 32i$

LICZBY ZESPOLONE

Twierdzenie 9

Niech $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ wtedy
$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$,

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$,

i jeśli $z_2 \neq 0$ to
$|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

Przykład 10

Obliczyć $(1 + i)^{10}$.

Niech $z = 1 + i$ wówczs $|z| = \sqrt{2}$ zaś $Arg\, z = \frac{\pi}{4}$.

$z^{10} = \sqrt{2}^{10}(\cos\frac{10\pi}{4} + i\sin\frac{10\pi}{4}) = 2^5(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 32i$

LICZBY ZESPOLONE

Twierdzenie 9

Niech $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ wtedy
$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$,

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$,

i jeśli $z_2 \neq 0$ to
$|\dfrac{z_1}{z_2}| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.

Przykład 10

Obliczyć $(1+i)^{10}$.

Niech $z = 1 + i$ wówczs $|z| = \sqrt{2}$ zaś $Arg\, z = \frac{\pi}{4}$.

$z^{10} = \sqrt{2}^{10}(\cos\frac{10\pi}{4} + i\sin\frac{10\pi}{4}) = 2^5(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 32i$

Twierdzenie 9

Niech $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ wtedy
$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$,

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$,

i jeśli $z_2 \neq 0$ to
$|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

Przykład 10

Obliczyć $(1+i)^{10}$.

Niech $z = 1 + i$ wówczs $|z| = \sqrt{2}$ zaś $Arg\, z = \frac{\pi}{4}$.

$z^{10} = \sqrt{2}^{10}(\cos\frac{10\pi}{4} + i\sin\frac{10\pi}{4}) = 2^5(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 32i$

LICZBY ZESPOLONE

Twierdzenie 9

Niech $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ wtedy
$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$,

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$,

i jeśli $z_2 \neq 0$ to
$|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

Przykład 10

Obliczyć $(1+i)^{10}$.

Niech $z = 1 + i$ wówczs $|z| = \sqrt{2}$ zaś $Arg\, z = \frac{\pi}{4}$.

$z^{10} = \sqrt{2}^{10}(\cos\frac{10\pi}{4} + i\sin\frac{10\pi}{4}) = 2^5(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 32i$

Twierdzenie 9

Niech $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ wtedy
$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$,

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$,

i jeśli $z_2 \neq 0$ to
$|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

Przykład 10

Obliczyć $(1 + i)^{10}$.

Niech $z = 1 + i$ wówczas $|z| = \sqrt{2}$ zaś $Arg\, z = \frac{\pi}{4}$.

$$z^{10} = \sqrt{2}^{10}(\cos\frac{10\pi}{4} + i\sin\frac{10\pi}{4}) = 2^5(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 32i$$

Przykład 11

Obliczyć $\sqrt[3]{-1+i}$.

Niech $z=-1+i$ wówczs $|z|=\sqrt{2}$ zaś $Arg\, z=\frac{3\pi}{4}$.

$$\omega_1=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\pi}{4}))=\sqrt[6]{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}),$$

$$\omega_2=\sqrt[6]{2}(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right))=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{11\pi}{12}+i\cdot\sin\frac{11\pi}{12}),$$

$$\omega_3=\sqrt[6]{2}(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right))=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{19\pi}{12}+i\cdot\sin\frac{19\pi}{12}).$$

LICZBY ZESPOLONE

Przykład 11

Obliczyć $\sqrt[3]{-1+i}$.

Niech $z=-1+i$ wówczas $|z|=\sqrt{2}$ zaś $Arg\, z=\frac{3\pi}{4}$.

$\omega_1=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\pi}{4}))=\sqrt[6]{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})$,

$\omega_2=\sqrt[6]{2}(\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3})+i\cdot\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}))=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{11\pi}{12}+i\cdot\sin\frac{11\pi}{12})$,

$\omega_3=\sqrt[6]{2}(\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3})+i\cdot\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}))=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{19\pi}{12}+i\cdot\sin\frac{19\pi}{12})$.

Przykład 11

Obliczyć $\sqrt[3]{-1+i}$.

Niech $z=-1+i$ wówczs $|z|=\sqrt{2}$ zaś $Arg\, z=\frac{3\pi}{4}$.

$\omega_1=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\pi}{4}))=\sqrt[6]{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})$,

$\omega_2=\sqrt[6]{2}(\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3})+i\cdot\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}))=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{11\pi}{12}+i\cdot\sin\frac{11\pi}{12})$,

$\omega_3=\sqrt[6]{2}(\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3})+i\cdot\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}))=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{19\pi}{12}+i\cdot\sin\frac{19\pi}{12})$.

LICZBY ZESPOLONE

Przykład 11

Obliczyć $\sqrt[3]{-1+i}$.

Niech $z=-1+i$ wówczas $|z|=\sqrt{2}$ zaś $Arg\, z=\frac{3\pi}{4}$.

$$\omega_1=\sqrt[6]{2}(\cos\tfrac{\pi}{4}+i\cdot\sin\tfrac{\pi}{4}))=\sqrt[6]{2}(\tfrac{\sqrt{2}}{2}+i\tfrac{\sqrt{2}}{2}),$$

$$\omega_2=\sqrt[6]{2}(\cos(\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{2\pi}{3})+i\cdot\sin(\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{2\pi}{3}))=\sqrt[6]{2}(\cos\tfrac{11\pi}{12}+i\cdot\sin\tfrac{11\pi}{12}),$$

$$\omega_3=\sqrt[6]{2}(\cos(\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{4\pi}{3})+i\cdot\sin(\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{4\pi}{3}))=\sqrt[6]{2}(\cos\tfrac{19\pi}{12}+i\cdot\sin\tfrac{19\pi}{12}).$$

Przykład 11

Obliczyć $\sqrt[3]{-1+i}$.

Niech $z=-1+i$ wówczs $|z|=\sqrt{2}$ zaś $Arg\, z=\frac{3\pi}{4}$.

$\omega_1=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\pi}{4}))=\sqrt[6]{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})$,

$\omega_2=\sqrt[6]{2}(\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3})+i\cdot\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}))=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{11\pi}{12}+i\cdot\sin\frac{11\pi}{12})$,

$\omega_3=\sqrt[6]{2}(\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3})+i\cdot\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}))=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{19\pi}{12}+i\cdot\sin\frac{19\pi}{12})$.

LICZBY ZESPOLONE

Przykład 11

Obliczyć $\sqrt[3]{-1+i}$.

Niech $z=-1+i$ wówczs $|z|=\sqrt{2}$ zaś $Arg\, z=\frac{3\pi}{4}$.

$$\omega_1=\sqrt[6]{2}(\cos\tfrac{\pi}{4}+i\cdot\sin\tfrac{\pi}{4}))=\sqrt[6]{2}(\tfrac{\sqrt{2}}{2}+i\tfrac{\sqrt{2}}{2}),$$

$$\omega_2=\sqrt[6]{2}(\cos(\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{2\pi}{3})+i\cdot\sin(\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{2\pi}{3}))=\sqrt[6]{2}(\cos\tfrac{11\pi}{12}+i\cdot\sin\tfrac{11\pi}{12}),$$

$$\omega_3=\sqrt[6]{2}(\cos(\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{4\pi}{3})+i\cdot\sin(\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{4\pi}{3}))=\sqrt[6]{2}(\cos\tfrac{19\pi}{12}+i\cdot\sin\tfrac{19\pi}{12}).$$

Przykład 11

Obliczyć $\sqrt[3]{-1+i}$.

Niech $z=-1+i$ wówczs $|z|=\sqrt{2}$ zaś $Arg\, z=\frac{3\pi}{4}$.

$$\omega_1=\sqrt[6]{2}(\cos\tfrac{\pi}{4}+i\cdot\sin\tfrac{\pi}{4}))=\sqrt[6]{2}(\tfrac{\sqrt{2}}{2}+i\tfrac{\sqrt{2}}{2}),$$

$$\omega_2=\sqrt[6]{2}(\cos(\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{2\pi}{3})+i\cdot\sin(\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{2\pi}{3}))=\sqrt[6]{2}(\cos\tfrac{11\pi}{12}+i\cdot\sin\tfrac{11\pi}{12}),$$

$$\omega_3=\sqrt[6]{2}(\cos(\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{4\pi}{3})+i\cdot\sin(\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{4\pi}{3}))=\sqrt[6]{2}(\cos\tfrac{19\pi}{12}+i\cdot\sin\tfrac{19\pi}{12}).$$

Przykład 11

Obliczyć $\sqrt[3]{-1+i}$.

Niech $z = -1 + i$ wówczas $|z| = \sqrt{2}$ zaś $Arg\, z = \frac{3\pi}{4}$.

$\omega_1 = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{\pi}{4})) = \sqrt[6]{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}),$

$\omega_2 = \sqrt[6]{2}(\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3})) = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{11\pi}{12} + i \cdot \sin\frac{11\pi}{12}),$

$\omega_3 = \sqrt[6]{2}(\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3})) = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{19\pi}{12} + i \cdot \sin\frac{19\pi}{12}).$

LICZBY ZESPOLONE

Uwaga (o ciele liczb zespolonych)
Zbiór $\mathbb{C}$ z działaniami dodawania (i) i mnożenia (ii) spełnia następujące warunki:

(1) $\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{C} \qquad (x,y)+(x',y') \in \mathbb{C}$

(2) $\forall (x,y),(x',y'),(x'',y'') \in \mathbb{C} \quad \left[(x,y)+(x',y')\right]+(x'',y'') = (x,y)+\left[(x',y')+(x'',y'')\right]$

(3) $\exists (0,0) \in \mathbb{C} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{C} \qquad (x,y)+(0,0) = (x,y) = (0,0)+(x,y)$

(4) $\forall (x,y) \in \mathbb{C} \quad \exists (-x,-y) \in \mathbb{C} \quad (x,y)+(-x,-y) = (0,0) = (-x,-y)+(x,y)$

Zatem zbiór $(\mathbb{C},+)$ jest **grupą**.

(5) $\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{C} \qquad (x,y)+(x',y') = (x',y')+(x,y)$

Zbiór $(\mathbb{C},+)$ jest **grupą abelową (przemienną)**.

(6) $\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{C} \qquad (x,y)\cdot(x',y') \in \mathbb{C}$

(7) $\forall (x,y),(x',y'),(x'',y'') \in \mathbb{C} \quad \left[(x,y)\cdot(x',y')\right]\cdot(x'',y'') = (x,y)\cdot\left[(x',y')\cdot(x'',y'')\right]$

(8) $\forall (x,y),(x',y'),(x'',y'') \in \mathbb{C} \quad \left[(x,y)+(x',y')\right]\cdot(x'',y'') = \left[(x,y)\cdot(x'',y'')\right]+\left[(x',y')\cdot(x'',y'')\right]$

Zbiór $(\mathbb{C},+,\bullet)$ jest **pierścieniem.**

(9) $\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{C} \qquad (x,y)\bullet(x',y') = (x',y')\cdot(x,y)$

Zbiór $(\mathbb{C},+,\bullet)$ jest **pierścieniem przemiennym.**

(10) $\exists (1,0) \in \mathbb{C} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{C} \qquad (x,y)\cdot(1,0) = (x,y) = (1,0)\cdot(x,y)$

Zbiór $(\mathbb{C},+,\bullet)$ jest **pierścieniem przemiennym z jedynką.**

(11) $\forall (x,y) \in \mathbb{C}\setminus\{(0,0)\} \quad \exists \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right) \in \mathbb{C}$

$$(x,y)\cdot\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right) = (1,0) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)\cdot(x,y)$$

Zbiór $(\mathbb{C},+,\bullet)$ jest **ciałem liczb zespolonych.**